I. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

نشاط1: Activité 1

من بين الأعداد التالية، حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية: $\sqrt{25}\,;\frac{15}{3}\,;15-20\,;\frac{5}{2}\,;4+10\,;\sqrt{3}\,;0$

1) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية: L'Ensemble des Nombres Entiers Naturels

1 /1 تعريف: Définition

الأعداد 0، 1، 2، 3 ... تسمى أعداد صحيحة طبيعية وتكون مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{N}$ ونكتب: $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...;n;...\}$

1 /2 ترميز ومصطلحات: Notation

* مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نرمز لها ب $\mathbb{N}^*$. ونكتب: $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;4;...;n;...\}$
* كل عدد صحيح طبيعي هو عنصر من $\mathbb{N}$.
* العدد 5 عدد صحيح طبيعي، نكتب: $5\in\mathbb{N}$
* العدد 15- ليس بعدد صحيح طبيعي، نكتب: $-15\notin\mathbb{N}$

1 /3 تمرين تطبيقي: Exercice d'application

أتمم الفراغ باستعمال احد الرموز : $\in$ أو $\notin$: $3,4...\mathbb{N}$;; $0...\mathbb{N}^*$;; $-4...\mathbb{N}$;; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}...\mathbb{N}$;; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$

نشاط 2 : Activité 2

من بين الأعداد التالية، 24 ; $\sqrt{19}$;1 ; 2020 ; 89 ; 1970 ; 8721 ; 8 ; $\sqrt{34}$; 0 ; 5,4 استخرج :

جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية:

جميع الأعداد الزوجية:

جميع ألأعداد الفردية:

2) الأعداد الزوجية والفردية: les nombres pairs et les nombres impairs

2 /1 تعاريف : Définitions

ليكن n من $\mathbb{N}$ ،

* n عدد صحيح طبيعي إذن فهو اما عدد زوجي أو عدد فردي.
* نقول أن n عدد زوجي إذا كان يكتب على شكل: $n=2k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$
* نقول أن n عدد فردي إذا كان يكتب على شكل: $n=2k+1$ بحيث $k\in\mathbb{N}$

2 /1 أمثلة وترميز: Notation

* نرمز لمجموعة الأعداد الزوجية بالرمز P
* 80 عدد زوجي لإن: $80=2\times40$ و $40\in\mathbb{N}$ إذن نكتب $80\in P$
* نرمز لمجموعة الأعداد الفردية بالرمز I
* 17 عدد فردي لإن $17=2\times8+1$ و $8\in\mathbb{N}$ إذن نكتب $17\in I$
* $\sqrt{3}$ ليس بعدد زوجي وليس بعدد فردي

2/ 2 تمارين تطبيقية: Exercices d'application

تطبيق 1 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a > b$. املأ الجدول التالي: (مع البرهان)

الأعداد	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
الزوجية	زوجي	زوجي			
	زوجي	فردي			
	فردي	زوجي			
	فردي	فردي			

البرهان: démonstration

a زوجي يعني a يكتب على شكل: $a=2k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$

b زوجي يعني b يكتب على شكل: $b=2k'$ بحيث $k'\in\mathbb{N}$

إذن
$$a+b=2k+2k'$$
$$=2(k+k')$$
$$a+b=2k'' \ / k''=k+k'$$

ومنه $a+b$ عدد زوجي .

نفس الطريقة ل $a-b$

a زوجي يعني a يكتب على شكل: $a=2k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$

b فردي يعني b يكتب على شكل: $b=2k'+1$ بحيث $k'\in\mathbb{N}$

إذن
$$a+b=2k+2k'+1$$
$$=2(k+k')+1$$
$$a+b=2k''+1 \ / k''=k+k'$$

ومنه $a+b$ عدد فردي .

نفس الطريقة ل $a-b$

a زوجي يعني a يكتب على شكل: $a=2k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$

b زوجي يعني b يكتب على شكل: $b=2k'$ بحيث $k'\in\mathbb{N}$

إذن
$$a\times b=2k\times 2k'$$
$$=2(2kk')$$
$$a+b=2k'' \ / k''=2kk'$$

ومنه $a\times b$ عدد زوجي .

a زوجي يعني a يكتب على شكل: $a=2k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$

b فردي يعني b يكتب على شكل: $b=2k'+1$ بحيث $k'\in\mathbb{N}$

إذن
$$a\times b=2k\times\ 2k'+1$$
$$=2\ k\times(2k'+1)$$
$$a+b=2k''\ /\ k''=k\times(2k'+1)$$

ومنه $a\times b$ عدد زوجي .

نتائج : Résultats

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين لدينا :

- العددين $a+b$ و $a-b$ لهما نفس الزوجية (أي اما زوجيان معا أو فرديان معا)
- $a\in P \ et \ b\in P \ alors \ (a\times b)\in P$;; $a\in P \ et \ b\in P \ alors \ (a\pm b)\in P$
- $a\in P \ et \ b\in I \ alors \ (a\times b)\in P$;; $a\in P \ et \ b\in I \ alors \ (a\pm b)\in I$
- $a\in I \ et \ b\in I \ alors \ (a\times b)\in I$;; $a\in I \ et \ b\in I \ alors \ (a+b)\in P$

تطبيق 2 :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ ، ادرس زوجية كل من :

أ) 2020^{2021} ، 2021^{2020} ، 12358789×235978

ب) $4n+6$ ثم $(4n+6)^7$

ج) $2n+3$ ثم $(2n+3)^6$

1. ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ ،

أ) بين أن $n(n+1)$ عدد زوجي.

ب) ليكن $A=n^2+3n$ ، بين أن A عدد زوجي.

ج) ليكن $B=n^2+7n+3$ ، بين أن B عدد فردي.

نتيجة : Résultat

جداء عددين صحيحين طبيعيين متتابعين هو عدد زوجي

II. مضاعفات عدد صحيح طبيعي – المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين

شاط1: Activité 1

1. ضع علامة (×) في المكان المناسب:

	14	6	11	2	21	0	28	120
من مضاعفات 2								
من مضاعفات 3								
من مضاعفات 5								
من مضاعفات 9								
من مضاعفات 10								

1. تعريف: Définition

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.
نقول أن a مضاعف للعدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $a = b \times k$

مثال

ليكن n من $\mathbb{N}$
هل العدد $6n+3$ من مضاعفات العدد 3؟
هل العدد $6n+3$ من مضاعفات العدد 2؟

لدينا $6n+3=3\ 2n+1$
يعني أن $6n+3=3k$ حيث $k=2n+1$
ومنه $6n+3$ من مضاعفات العدد 3 ونكتب $6n+3 \in M_3$
لدينا $6n+3=2\left(3n+\frac{3}{2}\right)$ ، وبما أن $\left(3n+\frac{3}{2}\right) \notin \mathbb{N}$
فإن $6n+3$ ليست من مضاعفات العدد 2 ونكتب $6n+3 \notin M_2$

2. أمثلة وترميز: Exemples et Notation

نرمز لمجموعة مضاعفات العدد a بالرمز M_a
$M_6 = \{0;6;12;18;24;30;36;42;48;54;...\}$
$M_{10} = \{0;10;20;30;50;60;70;80;90;...\}$
مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين الصحيحين الطبيعيين 6 و 10: $M_6 \cap M_{10} = \{0\,;30\,;60\,;...\}$
لدينا 30 أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين الصحيحين الطبيعيين 6 و 10: $ppcm(6;10) = 30$ ونكتب أيضا $6 \vee 10 = 30$

3. تعريف: Définition

يكون عدد صحيح طبيعي m مضاعف مشترك ل a و b اذا كان مضاعفا لهما.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو اصغر مضاعف مشترك غير منعدم ل a و b ونرمز له ب $a \vee b$ أو $PPCM(a;b)$

4. تطبيقات: applications

تمرين 1 :

حدد مايلي : $ppcm(5;3)$ ، $ppcm(5;20)$ ، $ppcm(5;7)$

III. قواسم عدد صحيح طبيعي – القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين

نشاط1: Activité 1

1. ضع علامة × في المكان المناسب:

	12	7	10	11	42	8	9
2 قاسم ل							
3 قاسم ل							
5 قاسم ل							
7 قاسم ل							
1 قاسم ل							

1. تعريف: Définition

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.

نقول أن a يقسم العدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي $\mathbb{N}$ بحيث: $b = a \times k$ ونكتب a/b

2. أمثلة وترميز: Exemples et Notation

ترميز:

لدينا $6 = 2\times 3$ ، وبالتالي يمكن أن نقول أن:

- $2/6$ و $3/6$
- 6 يقبل القسمة على 2 و 3

نرمز لمجموعة قواسم عدد n بالرمز D_n

مثال 1:

$D_6 = \{1;2;3;6\}$ ، $D_{12} = \{1;2;3;4;6;12\}$ ، $D_3 = \{1;3\}$ ، $D_1 = \{1\}$

مجموعة القواسم المشتركة للعددين الصحيحين الطبيعيين 6 و 12: $D_6 \cap D_{12} = \{1;2;3;6\}$

لدينا 6 أكبر قاسم مشترك للعددين الصحيحين الطبيعيين 6 و 12: $pgcd(12;6) = 6$ ونكتب أيضا $6 \vee 12 = 6$

مثال 2:

حدد $15 \wedge 18$

لدينا: $D_{15} = \{1;3;5;15\}$ و $D_{18} = \{1;2;3;6;9;18\}$

القواسم المشتركة ل 15 و 18 هي $\{1;3\}$

اذن $15 \wedge 18 = 3$

3. تعريف: Définition

يكون عدد صحيح طبيعي m قاسما مشترك ل a و b اذا كان قاسما لهما.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك ل a و b ونرمز له ب $a \wedge b$ أو $p\gcd(a;b)$

4. تطبيقات: Applications

تمرين 1 :

لليكن a و b و c عناصر من $\mathbb{N}$

بين أنه إذاكان a/b و a/c فإن $a/3b-2c$

تمرين 2 :

1. حدد مايلي: $pgcd(6;8)$ ، $pgcd(6;26)$ ، $pgcd(30;52)$

اضافة : خوارزمية أقليدس: L'algorithme d'Euclide

هي عبارة عن قسمات متتالية حيث اخر باقي غير منعدم هو $PGCD(a;b)$

مثال 1 : $PGCD(36;24)$ لدينا: $a=b\times q+r$ $36=24\times1+12$ و $24=12\times2+0$ إذن $PGCD(36;24)=12$	مثال 2 : $PGCD(30;52)$ لدينا: $a=b\times q+r$ $52=30\times1+22$ $30=22\times1+8$ $22=8\times2+6$ $8=6\times1+2$ $6=2\times3+0$ اذن $PGCD(30;52)=2$

تطبيق :

حدد باستعمال خوارزمية أقليدس: $PGCD(3240;1440)$ و $PGCD(132;595)$

5. مصاديق قابلية القسمة على : 2، 3، 4، 5، 9: Critères de divisibilité par

خاصيات: Propriétés

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، يكون n قابلا للقسمة :

* على 2 : إذا كان رقم وحداته هو 0 – 2 – 4 – 6 – 8 .
* على 3 : إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3.
* على 4 : إذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.
* على 5 : إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.
* على 9 : ذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9.

تمرين تطبيق: Exercice d'application

1) هل الاعداد التالية من مضاعفات العدد 2 ، 3، 4، 5، 9؟

3472 - 225 - 3440 - 313452

2) حدد العدد a من أجل أن يكون العدد $23a5$ يقبل القسمة على 3.

الحل:

1) العدد 3472 - 3440 - 313452 من مضاعفات العدد 2

العدد 3472 - 225 - 313452 من مضاعفات العدد 3

العدد 3440 - 225 من مضاعفات العدد 5

العدد 225 - 313452 من مضاعفات العدد 9

2) حدد العدد a من أجل أن يكون العدد $23a5$ يقبل القسمة على 3.

لدينا a عبارة عن رقم يعني أن $a\in 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$

ولدينا $23a4$ يقبل القسمة على 3 يعني أن $2+3+a+5\in M_3$

أي $10+a\in\{0;3;6;9;12;15;18;21;24;27;...\}$

ومنه $a\in\{2;5;8\}$

IV. الأعداد الأولية: Nombres premiers

تقديم: Présentation

لدينا: $D_1=\{1\}$ $D_2=\{1;2\}$ $D_3=\{1;3\}$ $D_5=\{1;5\}$ $D_7=\{1;7\}$
$D_{11}=\{1;11\}$ $D_{13}=\{1;13\}$ $D_{17}=\{1;17\}$ $D_{19}=\{1;19\}$

الأعداد 2 و 3 و 5 و 13 لها قاسمان فقط 1 و نفسها ، نسمي هذه الأعداد بأعداد أولية

1. تعريف: définition

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، نقول أن n هو عدد أولي إذا وجد له قاسمان بالضبط، 1 و n نفسه.

مثال:

- ✓ 17 عدد أولي
- ✓ 77 ليس بعدد أولي
- ✓ 1 ليس بعدد أولي لأن له قاسم واحد فقط

2. غربال اراطوستين: Crible d'ERATHOSTENE

لنحدد الأعداد الأولية الأصغر من 50.
نحتفظ ب2 و نشطب على كل مضاعفاته
نحتفظ ب3 و نشطب على كل مضاعفاته
نحتفظ ب5 و نشطب على كل مضاعفاته
نحتفظ ب7 و نشطب على كل مضاعفاته
نحتفظ ب11 و نشطب على كل مضاعفاته

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	

مثال:

هل الأعداد التالية أعداد أولية: 703 ; 277 ; 7001007 ; 32695 ; 102

الحل :

- لدينا العدد 102 يقبل القسمة على 2 إذن 102 ليس بعدد أولي
- لدينا 32695 يقبل القسمة على 5 إذن 32695 ليس بعدد أولي
- لدينا 7001007 يقبل القسمة على 3 إذن 7001007 ليس بعدد أولي

3. طريقة تحديد ما ان كان عددا أوليا أم لا: comment reconnaitre un nombre premier

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم، هل العدد a عدد أولي؟

أ- إذاكان العدد a يقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 فإن a ليس بعدد أولي (باستعمال مصاديق قابلية القسمة)

ب- إذاكان العدد a لا يقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5

1- نحسب $\sqrt{a}$

2- نحدد جميع الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{a}$.

3- اذا كان a لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد فان a عدد أولي.

تتمة الحل :

لدينا العدد 703 لا يقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5

1- نحسب $\sqrt{277}$: $\sqrt{277}\simeq 16,64$

2- نحدد جميع الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{277}$: $Pr_{\leq\sqrt{277}}=\{2;3;5;7;11;13\}$

3- لدينا 277 لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد إذن 277 عدد أولي.

لدينا العدد 277 لا يقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5

1- نحسب $\sqrt{703}$: $\sqrt{703}\simeq 26;51$

2- نحدد جميع الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{703}$: $Pr_{\leq\sqrt{703}}=\{2;3;5;7;11;13;17;19;23\}$

3- لدينا 703 يقبل القسمة على 19 إذن 703 ليس بعدد أولي.

V. التفكيك الى جداء عوامل أولية: Décomposition en produit de facteurs premiers

تقديم: Présentation

ليكن $a = 25300$ لدينا :

$$a = 253\times100$$
$$=11\times23\times(2\times5)^2$$
$$=2^2\times5^2\times11\times23$$

هذه الكتابة تسمى تفكيك العدد a الى جداء عوامل أولية.

1. خاصية: propriété

نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم يخالف 1 يكتب على شكل جداء عوامل أولية.

أمثلة:

نعتبر العدد 1530

2	1530
3	765
3	255
5	85
17	17
	1

و منه $1530 = 2\times3^2\times5\times17$

2. تطبيق: application

1) فكك الأعداد التالية إلى جداء أعداد أولية: 595 و 3240 و 1440

2) بسط الأعداد التالية: $\sqrt{1440\times3240}$; $\sqrt{3240}$; $\sqrt{1440}$

VI. تطبيقات Applications

تقديم: Présentation

ليكن $a = 360$ و $b = 700$ علما أن $a\wedge b = 20$ و $a\vee b = 12600$

1) فكك الأعداد التالية إلى جداء أعداد أولية: $a; b$; $a\wedge b$; $a\vee b$

2) كيف يمكن إيجاد تفكيك $a\wedge b$ انطلاقا من تفكيكي a و b.

3) نفس السؤال بالنسبة ل $a\vee b$

1. خاصية: (نقبل أن) Propriétés

انطلاقا من التفكيك الى جداء عوامل أولية للعددين a و b :

-المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير مشتركة المرفوعة الى أكبر أس.

-القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة المرفوعة الى أصغر أس.

2. تطبيق: Application

1. فكك الأعداد التالية إلى جداء أعداد أولية: 1386 ; 3150 ثم حدد $3150\wedge1386$ و $3150\vee1386$
2. فكك الأعداد التالية إلى جداء أعداد أولية: 595;123 ثم حدد $123\wedge595$ ، ماذا تلاحظ ؟

3. تعريف : Définition

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.

نقول أن a و b أوليين فيما بينهما إذاكان $pgcd(a;b)=1$

مثال :

لدينا $pgcd(5;13)=1$ إذن 5 و 13 أوليين فيما بينهما

لدينا $pgcd(12;30) = 6$ إذن 12 و 30 ليسا أوليين فيما بينهما

اظافات:

كيفية تحديد قواسم عدد:

ليكن $a=72$ حدد جميع قواسم a

لدينا $a=72=2^3\times3^2$ نضع مايلي: $(1;2;2^2;2^3)(1;3;3^2)$ إذن:

$$D_{72}=\{1;3;9;2;6;18;4;12;36;8;24;72\}$$

العلاقة بين $a\wedge b$ و $a\vee b$:

نشاط: ليكن $a=2^3\times5^2\times7$ و $a=2\times3^3\times5^3$

1- حدد $a\wedge b$ و $a\vee b$.

2- احسب $(a\wedge b)\times(a\vee b)$ على شكل جداء عوامل أولية.

3- ماذا تلاحظ ؟

الحل:

1- $a\wedge b=2^1\times5^2$ و $a\vee b=2^3\times3^3\times5^3\times7$

2- لدينا:

$$\begin{aligned}(a\wedge b)(a\vee b)&=(2^1\times5^2)(2^3\times3^3\times5^3\times7)\\&=(2^3\times5^2\times7)(2\times3^3\times5^3)\\&=a\times b\end{aligned}$$

نتيجة : $(a\wedge b)(a\vee b)=a\times b$

ملاحظات	المحتوى

I. تساوي متجهتين- مجموع متجهتين:

نشاط:

A، B، C و D اربع نقط من المستوى (P).

1) أنشئ النقطتين من المستوى M و N بحيث: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2) بين أن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $MNCB$.

خاصية:

- تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الإتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم(نرمز لمنظم متجهة $\vec{u}$ بالرمز $\|\vec{u}\|$).
- ليكن A، B و C ثلاث نقط من المستوى (P). لدينا:
  - $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (علاقة شال).
  - $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ تكافئ $ABDC$ متوازي أضلاع
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ تكافئ $ABDC$ متوازي أضلاع.
  - $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

تطبيق:

1) بسط المتجهة $\vec{U}$ بحيث $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$.

2) لتكن A، B، C، D و E نقط من المستوى. بين أن: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

II. ضرب متجهة في عدد حقيقي:

نشاط:

ABC مثلث. أنشئ النقط M، N، L و K بحيث:

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BN}=-2\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم. لدينا:

- $k\vec{u}$ عبارة عن متجهة.
- $k\vec{u}$ و $\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه .
- إذا $k\succ 0$ فإن $k\vec{u}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى و لدينا: $\|k\vec{u}\|=k\|\vec{u}\|$.
- إذا $k\prec 0$ فإن $k\vec{u}$ و $\vec{u}$ لهما منحيان متعاكسان و لدينا: $\|k\vec{u}\|=-k\|\vec{u}\|$.

تطبيق:

ليكن ABC مثلثا ولتكن D نقطة من المستوى بحيث: $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$.

1) بين أن $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

2) أنشئ النقطة D.

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى و α و β عددان حقيقيان. لدينا:

- $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

- $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
- $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
- $1\vec{u}=\vec{u}$
- $k\vec{u}=\vec{0}$ تكافئ $\vec{u}=\vec{0}$ أو $k=0$.

تطبيق:

1) – بسط التعابير المتجهية التالية:

$$\vec{a}=2\left(\vec{u}+5\vec{v}\right)+3\left(\vec{u}-\vec{v}\right) \text{ و } \vec{b}=13\vec{u}+3\left(4\vec{v}-\vec{u}\right)+2\vec{v}$$

2) – حدد علاقة متجهية بين المتجهتين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ؟

III. استقامية متجهتين- استقامية ثلاث نقط:

نشاط:

ABC مثلث. لتكن E و D نقطتان بحيث: $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1)- أنشئ الشكل.

2)- بين أن: $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3)- استنتج العلاقة بين المتجهتين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$.

4)- ماذا يمكن القول عن النقط A و E و D؟ علل جوابك.

تعريف وخاصية:

- تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.
- تكون النقط A، B و C مستقيمية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$.
- العدد الحقيقي α يسمى أفصول C في المعلم (A,B).

مثال:

$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ النقط A، C و D مستقيمية و $\frac{4}{3}$ هو أفصول C في المعلم (A,D).

تطبيق:

ليكن ABC مثلثا في المستوى ولتكن D و E نقطتين من المستوى بحيث: $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

بين أن $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. ماذا تستنتج؟

تمرين: تمرين ④ من السلسة.

IV. منتصف قطعة:

خاصية:

I منتصف القطعة $[AB]$ يكافئ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

تطبيق:

ABC و I و J على التوالي منتصفي $[AB]$ و $[AC]$. بين أن: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

	خاصية: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة)
	I منتصف القطعة $[AB]$. مهما تكن M من المستوى فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
	تمرين: تمرين ③ من السلسة. **تمرين توليفي: تمرين ⑧ من السلسة.**

الجحرة محمد
نيابة بني ملال

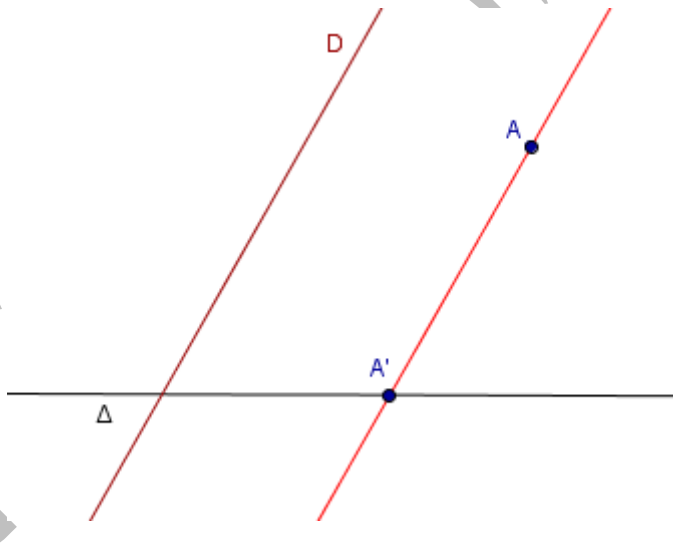
الإسقاط

الحصة الأولى

I. الإسقاط على مستقيم

1. نشاط ص 142

نفترض أن خيوط الأشعة الشمسية تتخذ اتجاه المستقيم (D) و أن المستقيم (Δ) يمثل سطح الأرض . ظل النقطة A على السطح هي النقطة A' تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المار من A و الموازي ل (D) .

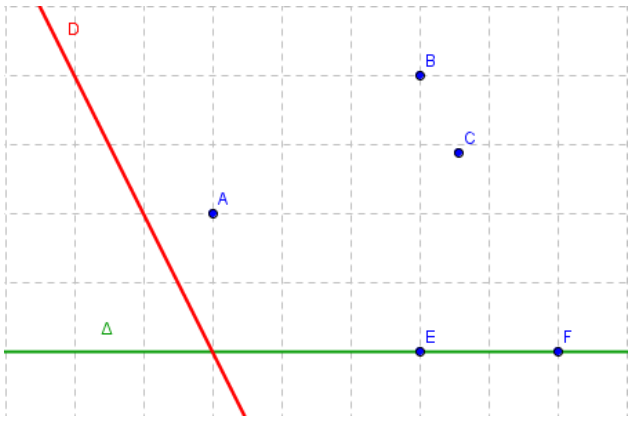


2. تعريف

النقطة A' تسمى مسقط النقطة A على (Δ) بتواز مع (D)

3. تطبيقات

نعتبر الشكل التالي بحيث النقط B و C و F مستقيمية و (BC) يوازي (Δ) و النقطتين E و F منتميتان إلى المستقيم (Δ)

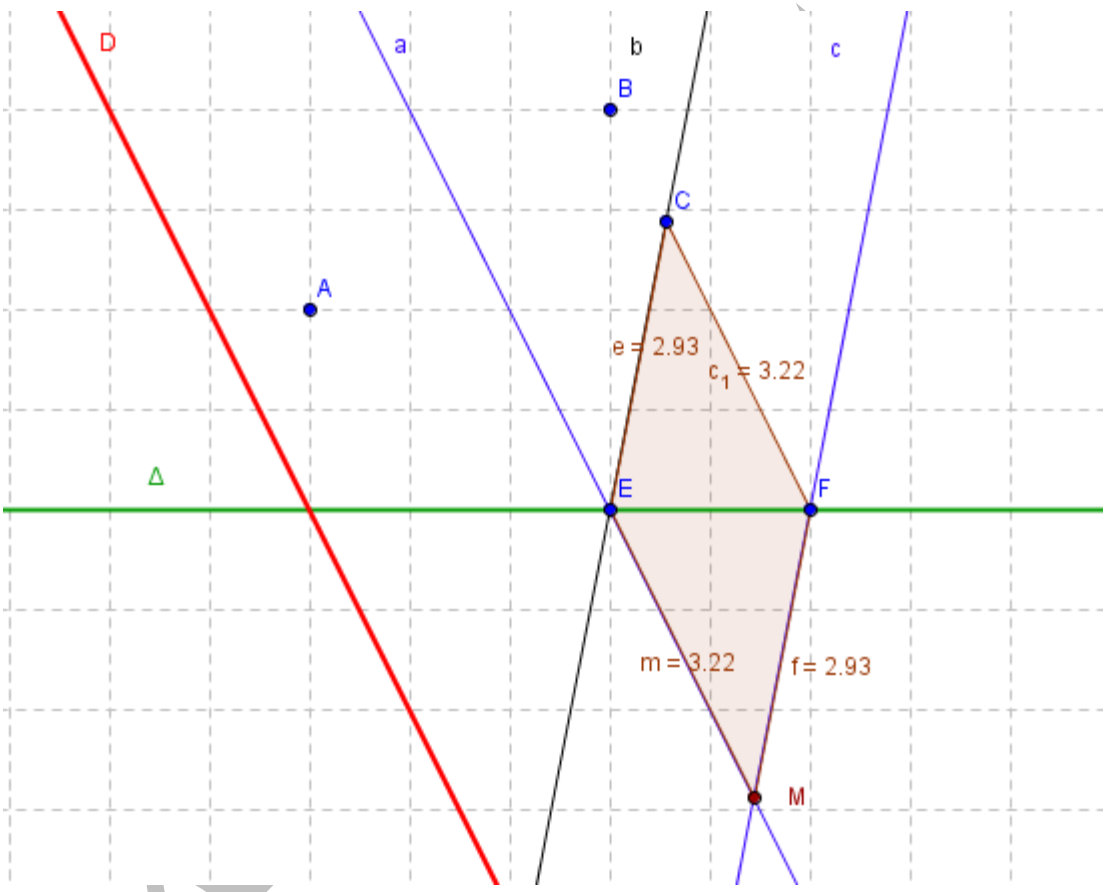


meljohra@gmail.com
http://www.meljohra.ift.cx

1. حدد مساقط النقط A و B و C و F و E على المستقيم (Δ) بتواز مع (D)
2. مثل مساقط النقط A و B و C و F و E على المستقيم (Δ) بتواز مع (D)
3. ما هو مسقط (ظل) القطعة [AB] ؟
4. ما هو مسقط القطعة [BC]
4. أنشئ النقطة M بحيث تكون النقطة E مسقط النقطة M على المستقيم (Δ) بتواز مع (D) و يكون الرباعي ECFM متوازي أضلاع

5. الحل

موضوع التمرين يمكن أن يستغل للاستأناس ببرنامج geogebra



6. الإسقاط العمودي

عندما يكون المستقيم (Δ) عموديا على المستقيم (D) فإن النقطة A' تسمى المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

7. خاصية

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في المستوى .

مسقط كل نقطة M من المستقيم (D) على المستقيم (D) هي النقطة M نفسها

الحصة رقم 2

II. مبرهنة طاليس المباشرة و العكسية

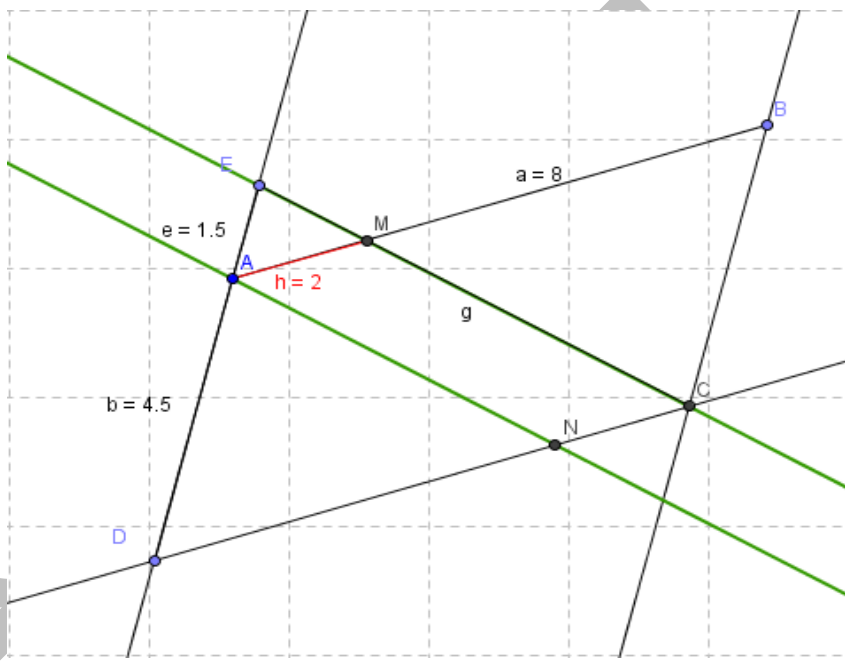
1. نشاط

ليكن ABCD متوازي أضلاع بحيث AB = 8 cm و AD = 4,5 cm . و النقطة E بحيث AE = 1,5 cm و $A \notin [AD]$.

المستقيم (EC) يقطع القطعة [AB] في نقطة M .

1. أحسب المسافة AM .
2. حدد النقطة N من القطعة [CD] بحيث : $DN = \frac{3}{4}\ DC$
3. بين أن $(C) \parallel (AN)$

4. الحل



1. لدينا $(AM) \parallel (DC)$

ومنه حسب خاصية طاليس المباشرة فإن : $\frac{EA}{ED} = \frac{EM}{EC} = \frac{AM}{DC}$

و منه $\frac{EA}{ED} = \frac{AM}{DC}$

أي $AM = \frac{EA}{ED} \times DC = \frac{(1,5\times 8)}{6} = 2$

يمكن التأكد من هذه القيمة بواسطة برنامج geogebra و ذلك ب:

afficher valeur et nom de l objet h voir figure

2. لدينا $\frac{DN}{DC} = \frac{3}{4}$ و $\frac{DA}{DE} = \frac{4,5}{6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ و منه $\frac{DA}{DE} = \frac{DN}{DC}$

و حيث النقط D و A و E في نفس ترتيب النقط D و N و C فإنه حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن $(E\ C) \parallel (AN)$

5. خاصية مبرهنة طاليس المباشرة

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين في نقطة A

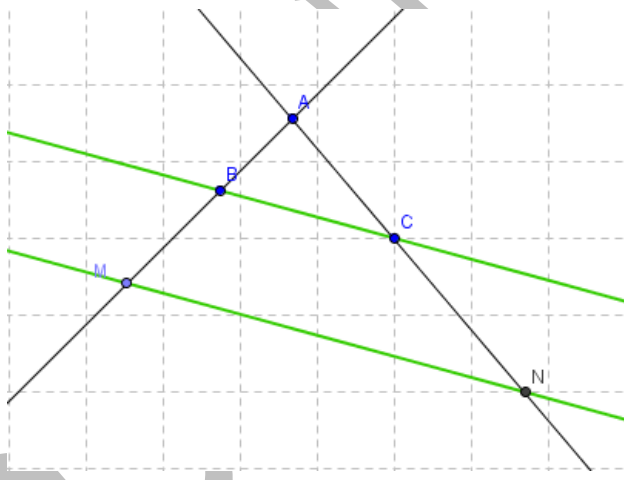
و لتكن B و M نقطتين من المستقيم (D) مختلفتان عن النقطة A

و لتكن C و N نقطتين من المستقيم (D') مختلفتان عن النقطة A

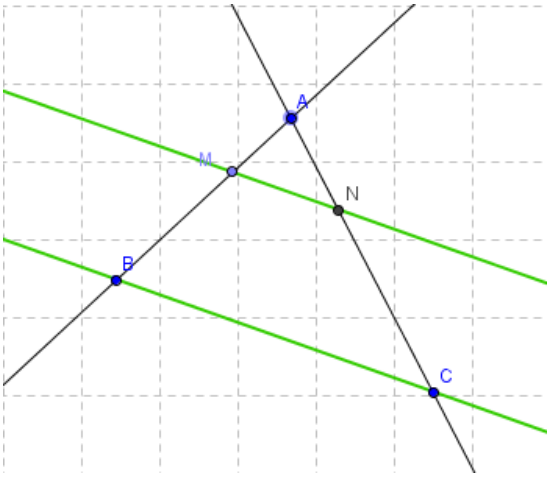
إذا كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان فإن : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

الأشكال :

شكل 1 :

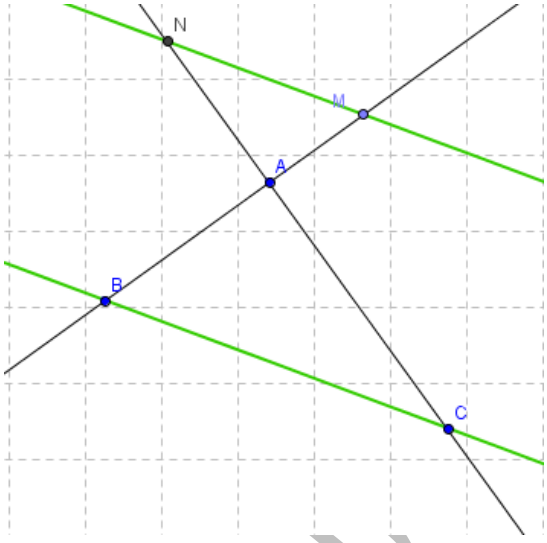


شكل 2:



شكل 3 :

الجحرة محمد



6. الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس المباشرة

إذا كانت A و M و B مستقيمية و A و N و C مستقيمية و $(BC) \parallel (MN)$ فإن :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$$

الجحرة محمد

الحصة رقم 3

7. خاصية مبرهنة طاليس العكسية

ليكن (D) و (D’) مستقيمين متقاطعين في نقطة A

و لتكن B و M نقطتين من المستقيم (D) مختلفتان عن النقطة A

و لتكن C و N نقطتين من المستقيم (D’) مختلفتان عن النقطة A

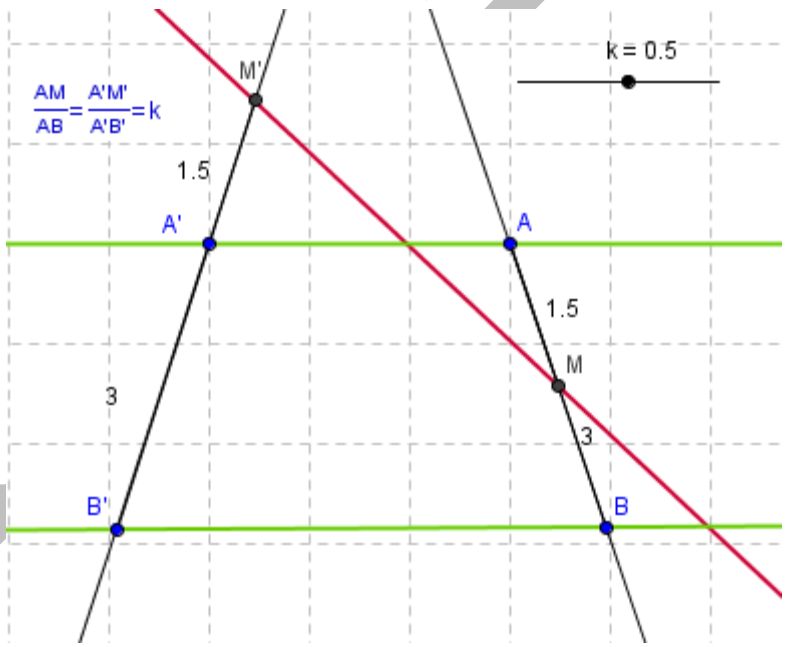
إذا كانت النقط A و M و B و النقط A و N و C في نفس الترتيب و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان .

8. الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس العكسية

إذا كان $\overrightarrow{A'} = k\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$ فإن $(BC) \parallel (MN)$

9. مثال مضاد

الشكل التالي يوضح أهمية الترتيب في مبرهنة طاليس العكسية



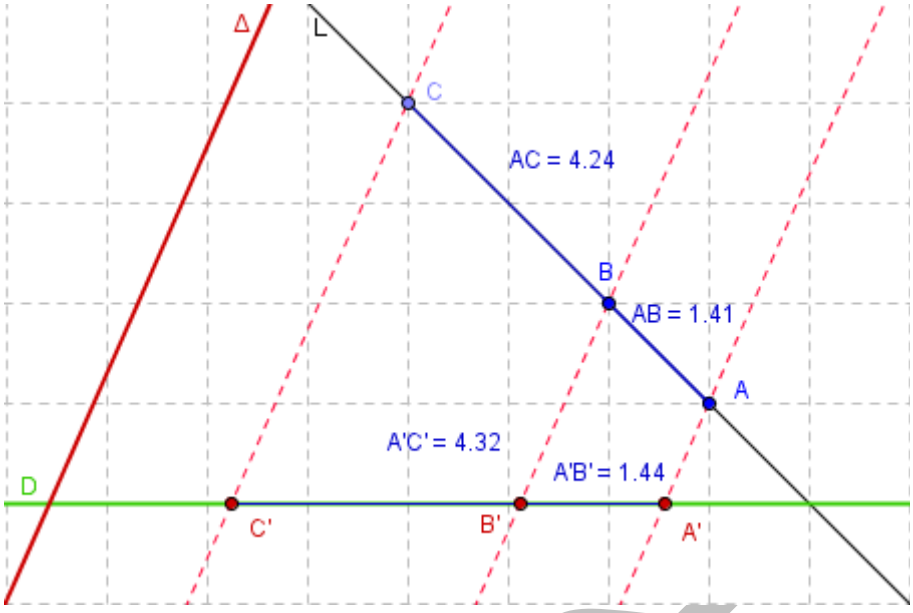
هنا $\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'} = k = 0,5$ و لكن المستقيم (MM’) لا يوازي المستقيمان المتوايان (AA’) و (BB’) و هذا راجع إلى أن النقط A و M و B لست في نفس ترتيب النقط A’ و M’ و B’

10. مبرهنة طاليس المباشرة بالإسقاط

ليكن (D) و (L) مستقيمين غير متوازيين لمستقيم ثالث (Δ)

و لتكن A و B و C نقط مختلفة من (L) و A’ و B’ و C’ مساقطها على التوالي على (D) بتواز مع (Δ)

فإن $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$



جحرة محمد

الحصة رقم 4

III. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

1. نشاط 4 ص 144 بتصرف

1. لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين مستقيميتين بحيث : $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ و نفترض أن $k > 0$. و ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين متقاطعين
   a. أنشئ النقطة M بحيث ABMC متوازي أضلاع و نضع I مركزه
   b. بين أن $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{CM}$
2. لتكن A' و B' و C' و D' و M' و I' على التوالي مساقط النقط A و B و C و D و M و I على المستقيم (Δ') بتواز مع (Δ)
   a. بين أن $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{C'M'}$
   b. ما هو نص الخاصية المحصل عليها لحد الآن؟
3. بتطبيق هذه الخاصية بين أن :
   a. النقطة I' هي منتصف القطعة [A'M'] (أي بين أن $\overrightarrow{A'I'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{A'M'}$)
   b. النقطة I' هي منتصف القطعة [B'C'] (أي بين أن $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{B'C'}$)
   c. استنتج أن $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'M'}$
4. تحقق أن لديك $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$
5. أكتب نص الخاصية المحصل عليها من هذا النشاط

2. الحل

3. خاصية

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين مستقيميتين بحيث : $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ و k عدد حقيقي غير منعدم . و ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين متقاطعين.

لتكن A' و B' و C' و D' على التوالي مساقط النقط A و B و C و D على المستقيم (Δ') بتواز مع (Δ)

فإن : $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{C'M'}$

4. تمرين تطبيقي ص 149

ليكن ABC مثلثا و لتكن I نقطة بحيث : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

النقطة E هي مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B . و المستقيمان (EI) و (BC) يتقاطعان في النقطة O

بين أن النقطة O هي منتصف القطعة [BC]

5. الحل

الحصة رقم 5

1. نشاط 5 : الإسقاط لمجموع متجهتين بتصرف ص 144

ليكن (D) و (Δ) مستقيمان متقاطعان. A و B و C و S نقط بحيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$

لتكن A' و B' و C' و S' مساقط النقط على التوالي A و B و C و S على (D) بتواز مع (Δ)

1. أنشئ شكلا يحقق المعطيات
2. تحقق أن $\overrightarrow{B'S'} = \overrightarrow{A'C'}$
3. بين أن : $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'S'}$

2. تمرين : مبرهنة مينيلوس ص 144

ليكن ABC مثلثا و (Δ) مستقيما يقطع (BC) في A' و (AC) في B' و (AB) في C'

لتكن D النقطة من (AB) بحيث (Δ) يوازي (CD)

أنشئ شكلا يحقق المعطيات

بين أن $\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{C'D}$ و أن $\frac{B'C}{B'A} = \frac{C'D}{C'A}$

استنتج أن : $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$ (هذه العلاقة تسمى مبرهنة مينيلوس)

3. تمرين 3 ص 153

1. ليكن ABC مثلثا و النقطتين M و N نحيث : $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ و $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$
   a. أنشئ شكلا يحقق المعطيات
2. لتكن M' و N' مسقطي النقطتين M و N على المستقيم (AC) بتواز مع المستقيم (BC) على التوالي.
   a. بين أن $\overrightarrow{NN'} = -2\overrightarrow{BC}$ و أن $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
   b. حدد العدد الحقيقي x بحيث $\overrightarrow{MM'} = x\overrightarrow{NN'}$

الجحرة محمد

ملاحظات	المحتوى

I. المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{D}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$:

نشاط:

ضع العلامة × في الخانات المناسبة :

	-6	$\sqrt{2}$	8	$\frac{\pi}{2}$	12,23	$-\frac{5}{2}$	$\frac{-\sqrt{16}}{2}$	ترميز المجموعة
عدد صحيح طبيعي								
عدد صحيح نسبي								
عدد عشري								
عدد جذري								
عدد لا جذري								
عدد حقيقي								

- ✓ نرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية بالرمز $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ و $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$.
- ✓ نرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,1,0,1,2,\dots\}$.
- ✓ نرمز لمجموعة الأعداد العشرية بالرمز $\mathbb{D}$: $\mathbb{D} = \{a.10^n / a,n \in \mathbb{Z}\}$.
- ✓ نرمز لمجموعة الأعداد الجذرية بالرمز $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ و } b \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- ✓ نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$: وهي مجموعة الأعداد الجذرية و اللاجذرية.
- ✓ لدينا $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

تطبيق:

) - أتمم باستعمال الرمز المناسب: $\in, \notin, \subset, \not\subset$.

$10 \dots \mathbb{N}$ $\quad 3,5 \dots \mathbb{Z}$ $\quad \frac{1}{3} \dots \mathbb{D}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{3} \dots \mathbb{Q}$ $\quad \frac{2\pi}{3} \dots \mathbb{R}$

$\frac{93}{125} \dots \mathbb{D}$ $\quad \sqrt{49} \dots \mathbb{N}$ $\quad \pi \dots \mathbb{Q}$ $\quad \frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{Z}$ $\quad 0 \dots \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \dots \mathbb{D}$ $\quad \mathbb{R} \dots \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{R} \dots \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{D} \dots \mathbb{R}$

II. العمليات في $\mathbb{R}$:

نشاط:

بسط التعبير التالي:

- $A = a-(b-c)-(b-c-a)-[(c-a-b)-(a+b+c)]$
- $B = (\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4})\times\frac{4}{11}+3(5-\frac{2}{9})$

خاصية:

a و b و c و d أعداد حقيقية :

- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

• $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq 0, d\neq 0)$ يكافئ $ad=bc$	• $\frac{a}{b}=c$ $(b\neq 0)$ يكافئ $a=bc$

تطبيق:

1) بسط العدد التالي: $C=\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

2) ليكن a و b و c أعداد حقيقية. بين أن: $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$

3) حدد قيم x التي من اجلها يكون حساب التعبير A ممكنا ثم اكتبه على شكل كسر:
$A=\frac{5}{2(x+3)}+\frac{4}{2(1-x)}$.

III. القوى- الكتابة العلمية:

نشاط:

1) من بين الأعداد التالية، حدد الأعداد المكتوبة كتابة علمية ثم اكتب الأعداد الأخرى على هذا الشكل:
$0,012\times10^{-3}$ ؛ 6500×10^{5} ؛ $5,03\times10^{-4}$ ؛ $-34,56\times10^{-2}$

تعريف:

ليكن x عددا عشريا .
الكتابة العلمية للعدد x هي إن $a10^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ و $a\in\mathbb{R}$ بحيث $1\leq a<10$ أو $-10<a\leq -1$

تطبيق:

اكتب الأعداد التالية كتابة علمية: $251,3$ ؛ $0,095$ ؛ $27,31\times10^{3}$ ، 150×10^{-3}

نشاط:

بسط الأعداد التالية: $A=2^{-5}\times3^{-3}\times2^{10}\times3^{-3}\times(-1)^{2016}$ و $B=\frac{4\times(10^{-2})^3\times10}{10^{-5}\times16}$

خاصية:

لكل عددين حقيقيين a و b غير منعدمين ولكل عددين صحيحين نسبيين n و m :
- $a^n\times a^m=a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m=a^{nm}$ $\quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $\quad \frac{1}{a^n}=a^{-n}$
- $a^n\times b^n=(ab)^n$ $\quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\quad a^0=1$.

تطبيق:

نعتبر العدد التالي: $N=\frac{6^{15}\times25^{7}}{3^{7}\times9^{4}}$.

اكتب العدد N على شكل $2^n\times5^m$، حيث n و m عددان صحيحان طبيعيان.

IV. الجذور المربعة:

نشاط:

بسط كتابة كل من الأعداد التالية: $\sqrt{2^2\times12^3\times3}$ ؛ $\sqrt{4^2+3^2}$ ؛ $\sqrt{\frac{2}{5}}\times\sqrt{\frac{3}{4}}$ ؛ $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(1-\sqrt{2})$

خاصية:

لكل عددين $a \in \mathbb{R}^+$ و $b \in \mathbb{R}^+$:

$\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = a$ $\quad$ $\sqrt{a}^n = \sqrt{a^n}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\quad$ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

تطبيق:

بين أن العدد $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} + \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ عدد صحيح نسبي.

بسط العدد التالي: $\sqrt{a}\sqrt{a^3b^2} - \sqrt{b}\sqrt{a^4b} + \sqrt{\sqrt{a^4b^4}}$

V. المتطابقات الهامة:

نشاط:

a و b عددان حقيقيان.

1) - ذكر بنشر كل من $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ و $(a-b)(a+b)$.

2) - انشر كل من $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ و $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ و $(a+b)^3$ و $(a-b)^3$.

خاصية:

a و b عددان حقيقيان.

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ؛ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ؛ $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ ؛ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ؛ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

تطبيق: (التمرين 10 من السلسلة)

1) انشر التعابير التالية:

$(a+2)(a^2-2a+4)$ ؛ $(x-1)(x^2+x+1)$ ؛ $(b+2)^3$ ؛ $(y-5)^3$.

2) عمل التعابير التالية:

- $A(x) = x^2 - 9 + (x-1)(x+3) - 2(x+3)^2$
- $B(x) = x^3 - 1000$
- $C(x) = x^3 - 8 + 4(x^2-4) - 3x + 6$
- $D(x) = x^3 + 1 + 2(x^2-1) - (x+1)$

ملاحظات	المحتوى

I. الترتيب والعمليات:

1) الترتيب:

نشاط:

1) - قارن كل عددين مما يلي:

• $\frac{7}{15}$ و $\frac{6}{17}$	• $3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.
نقول إن a أصغر أو يساوي b ونكتب: $a \le b$ إذا كان $a-b \le 0$.

تطبيق:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. قارن العددين: $\frac{2n}{2n+1}$ و $\frac{2n-1}{2n}$.

خاصية: (الترتيب والجمع)

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية.

- إذا كان $a \le b$ فإن $a+c \le b+c$.
- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فإن $a+c \le b+d$.

مثال:

ليكن $a \le \frac{5}{7}$ و $b \le \frac{16}{7}$.

لدينا $a+b \le \frac{5}{7}+\frac{16}{7}$ أي أن $a+b \le \frac{21}{7}$ ومنه $a+b \le 3$.

خاصية:(الترتيب و الضرب)

لتكن a و b و c و d و k أعداد حقيقية.

- إذا كان $k \ge 0$ فإن : $a \le b$ تكافئ $ka \le kb$.
- إذا كان $k \le 0$ فإن : $a \le b$ تكافئ $ka \ge kb$.
- إذا كان $0 \le a \le b$ و $0 \le c \le d$ فإن $ac \le bd$.
- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فإن $a+c \le b+d$.

أمثلة:

- إذا كان $a \le \frac{2}{\sqrt{3}}$ فإن $-\sqrt{3}a \ge -2$ لأن $-\sqrt{3} \le 0$
- إذا كان: $0 \le x \le \frac{3}{2}$ و $0 \le y \le 2$ فإن $xy \le 2.\frac{3}{2}$ أي $xy \le 3$.

خاصية: (الترتيب والمقلوب)

لتكن a و b عددين حقيقين.

- إذا كان $0 \prec a \le b$ فإن $0 \prec \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$.
- إذا كان $a \le b \prec 0$ فإن $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a} \prec 0$.

ذ.لطرش عبد الكبير

أمثلة:

- إذا كان $0 \prec x \leq 3$ فإن $0 \prec \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x}$.
- إذا كان $-\frac{5}{6} \leq x \prec 0$ فإن $0 \prec \frac{1}{x} \leq -\frac{6}{5}$.

تطبيق:

ليكن x عددا حقيقيا بحيث: $0 \prec \frac{1}{2x+1} \leq \frac{3}{2}$. بين أن $-\frac{1}{6} \prec x$.

خاصية: (الترتيب والمربع- الترتيب والجذر المربع)

لتكن a و b عددين حقيقين.

- إذا كان $0 \prec a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$.
- إذا كان $a \leq b \prec 0$ فإن $b^2 \leq a^2$.
- إذا كان $0 \prec a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

أمثلة:

لدينا $2 \leq \sqrt{5}$ إذن $2^2 \leq \sqrt{5}^2$ أي $4 \leq 5$.

لدينا $-3 \leq -2$ إذن $(-3)^2 \geq (-2)^2$ أي $9 \geq 4$.

تطبيق:

نعتبر العددين a و b حيث: $a = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$.

1) - بين أن: $a \geq 0$.

2) - احسب a^2 و b^2.

3) - قارن العددين a و b ثم العددين $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$.

2) التأطير:

نشاط:

x و y عددان حقيقيان بحيث: $3 \leq x \leq 7$ و $2 \leq y \leq 5$.

أطر التعابير التالية: $x+y$ و $x-y$ و xy و $\frac{x}{y}$.

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$. كل متفاوتة من المتفاوتات المزدوجة التالية:

$a \leq x \leq b$ و $a \leq x \prec b$ و $a \prec x \leq b$ و $a \prec x \prec b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$.

مثال:

$3,14 \prec \pi \leq 3,15$ تأطير للعدد π سعته $3,15 - 3,14 = 0,01$.

خاصية:

- إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن $a+c \leq x+y \leq b+d$ و $a-d \leq x-y \leq b-c$.
- إذا كان a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة وكان: $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن : $a+c \leq x+y \leq b+d$ و $a-d \leq x-y \leq b-c$.
- إذا كان a و b أعداد حقيقية موجبة وكان: $a \leq x \leq b$ فإن : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.

ذ.لطرش عبد الكبير

تطبيق:

x و y عددان حقيقيان بحيث: $-4 \le x \le -1$ و $5 \le y \le 9$.

أطر التعابير التالية: $x+y$ و $x-y$ و xy و $\frac{x}{y}$ و x^2+y^2.

تمرين: التمرين 5 من السلسلة.

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-2 \le x \le 2$ و $3 \le y \le 5$.

أطر التعابير التالية: $x+y$ و $x-y$ و xy و $\frac{x}{y}$.

II. المجالات

1) المستقيم العددي- مجالات $\mathbb{R}$:

نشاط:

ليكن (D) مستقيما منسوبا إلى معلم (O,I) حيث OI=1cm.

1) - مثل على المحور D(O,I) النقط A(2) و B(-3) و $C(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}})$.

مثل (لون) على D(O,I) مجموعة النقط ذات الأفصول x في الحالات التالية:

1) - $2 \le x \le 5$	2) - $1 \le x < 4$	3) - $x \ge 2$	3) - $x < 5$

الأعداد x بحيث $2 \le x \le 5$ تكون مجالا نرمز له بالرمز $[2;5]$.

تطبيق:

1) - حدد المجالات التي ينتمي لها العدد الحقيقي a في الحالات التالية:

1) - $-3 \le a \le 9$	2) - $0 < a < \sqrt{5}$	3) - $1 < a \le 4$	4) - $-7 \le a < 3$
5) - $a \le \sqrt{2}$	6) - $a < \frac{3}{7}$	7) - $a \ge 3\sqrt{7}$	8) - $a > \frac{-\sqrt{5}}{2}$

2) - حدد مركز وشعاع وسعة كل من المجالات التالية: $[2;7]$ ، $]-1;9]$ ، $[-5;-1[$ ، $]0;8[$.

2) تقاطع – اتحاد مجالين:

نشاط:

نعتبر المجالات $I=[-3;5]$ و $J=]2;7[$ و $K=[6;+\infty[$.

1) أنشئ المجالات I وJ و K في نفس المستقيم العددي بألوان مختلفة.

2) حدد ما يلي $I \cap J$ و $I \cap K$ و $I \cup J$ و $I \cup K$.

الرمز "$\cap$" يقرأ تقاطع و الرمز "$\cup$" يقرأ اتحاد.

أمثلة:

$[1;5] \cap]2,6] =]2;5]$	$]-1;2[\cap [3,4[= \varnothing$	$]-\infty;1] \cap [1,4[= \{1\}$
$[-3;2[\cup]1;4[= [-3;4[$		$]-\infty;3] \cup [3;-\infty[=]-\infty;-\infty[= IR$

ملاحظة:

$IR^{+} = [0,+\infty[$	$IR^{*+} =]0,+\infty[$	$IR^{-} =]-\infty,0]$	$IR^{*-} =]-\infty,0,[$

III. القيمة المطلقة وخاصياتها

نشاط:

ذ.لطرش عبد الكبير

ليكن (D) مستقيما مدرجا منسوبا إلى معلم (O,I).

1) - مثل على المحور D(O,I) النقط $A(2)$ و $B(4)$ و $C(-5)$ و $D(3,5)$ و $E(-2)$.

2) - استخرج أفصولان لهما نفس المسافة عن الصفر.

3) - أحسب المسافات التالية: AB، AE، AC و EB.

تعريف:

ليكن $x \in IR$.

نسمي القيمة المطلقة للعدد x العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|x|$ الذي يحقق:

- إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$.
- إذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$.

مثال:

$$\left|\sqrt{3}-2\right| = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3}$$

تعريف:

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين على محور ممنظم. لدينا: $AB = |b-a|$

مثال:

لنحدد المسافة بين النقطتين $A(\sqrt{7}-2)$ و $B(\sqrt{5}-2)$:

$$AB = \left|\left(\sqrt{5}-2\right)-\left(\sqrt{7}-2\right)\right| = \left|\sqrt{5}-\sqrt{7}\right| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-\sqrt{5}$$

خاصية:

ليكن $x, y \in IR$. لدينا:

- $|x| = |-x|$.
- $|x^2| = |x|^2 = x^2$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.
- $|x+y| \leq |x|+|y|$.
- $|x-y| \geq |x|-|y|$.
- $|x| = |y|$ تعني $x = y$ أو $x = -y$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال:

$|x| = 2$ تعني $x = 2$ أو $x = -2$.

تطبيق:

حل المعادلات التالية: $|2x-5| = 7$ ، $|3x+6| = -2$

خاصية:

ليكن $x, r \in IR$. لدينا:

- $|x| \leq r$ تعني $-r \leq x \leq r$ أي أن: $x \in [-r, r]$.
- $|x| \geq r$ تعني $x \geq r$ أو $-x \geq r$ أي أن: $x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$.

ذ.لطرش عبد الكبير

تطبيق:

حدد مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق ما يلي :

$\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{4}$ ، $|x-2|\geq\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}\leq|x-1|\leq 1$.

تعريف:

ليكن $[a;b]$ مجالا من IR بحيث $a\prec b$.

نسمي طول المجال $[a;b]$ العدد $b-a$.

نسمي مركز المجال $[a;b]$ العدد $\frac{b+a}{2}$.

نسمي شعاع المجال $[a;b]$ العدد $\frac{b-a}{2}$.

مثال:

نعتبر المجال $]-6;4[$.

طول المجال: $4-(-6)=10$.

مركز المجال: $\frac{4+(-6)}{2}=-1$.

شعاع المجال: $\frac{4-(-6)}{2}=5$

IV. التأطير والتقريب - التقريبات العشرية

1) التقريب بإفراط او بتفريط:

تعريف:

ليكن $a\leq x\leq b$ أو $a\leq x\prec b$ أو $a\prec x\leq b$ أو $a\prec x\prec b$.

العدد a يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بتفريط. (او بالدقة $b-a$).

العدد b يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بإفراط. (او بالدقة $b-a$).

مثال:

نعطي: $2,645<\sqrt{7}<2,646$.

2) قيمة مقربة:

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

إذا كان $|x-a|\leq r$، نقول إن a قيمة مقربة أو تقريب للعدد x بالدقة r.

مثال:

نعطي: $\left|\sqrt{5}-2,23\right|\leq 0,01$. $2,23$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{5}$ بالدقة $0,01$.

تطبيق:

حدد جميع التقريبات للعدد $\frac{3}{7}$ بالدقة $0,1$.

3) التقريبات العشرية:

تعريف:

ذ.لطرش عبد الكبير

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $N\times10^{-p}\le x\le(N+1)\times10^{-p}$ مع $p\in IN$ و $N\in\mathbb{Z}$.

العدد $N\times10^{-p}$ يسمى التقريب العشري ل x إلى 10^{-p} بتفريط.

العدد $(N+1)\times10^{-p}$ يسمى التقريب العشري ل x إلى 10^{-p} بافراط.

مثال:

نعطي: $0,62\le\frac{5}{8}\le0,63$.

تطبيق:

نضع $x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

إذا علمت أن: $1,73\prec\sqrt{3}\prec1,74$ و $2,64\prec\sqrt{3}\prec2,65$ أعط التقريب العشري بإفراط وبتفريط للعدد x بالدقة 10^{-2}.

ملاحظات	المحتوى

I. احداثيات متجهة - احداثيات نقطة:

نشاط:

نعتبر في المستوى المنسوب الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ النقط $A(0,2)$ و $B(1,-2)$ و $C(1,1)$.

1) حدد احداثيات المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم اكتبهما في الاساس $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) حدد احداثيات المتجهتين $\vec{u}$ و$\vec{v}$ بحيث: $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$.
3) حدد احداثيات I منتصف القطعة $[AC]$ ثم عبر عن المتجهة $\overrightarrow{OI}$ في الاساس$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

تعريف:

لتكن $\vec{u}(a,b)$ و $\vec{v}(a',b')$ متجهتين في المستوى المنسوب الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب، ونرمز له ب $\det(\vec{u},\vec{v})$ او $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ و نكتب: $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.

خاصية:

تكون متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين اذا وفقط اذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})=0$.

تطبيق:

1) احسب المحددتين $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.
2) ادرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية:

الحالة ❶: $\vec{u}(1,3)$ و$\vec{u}(-1,4)$. الحالة ❷: $\vec{u}(1,2)$ و$\vec{v}(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$.

3) ادرس استقامية النقط $A(0,1)$ و $B(-1,-2)$ و $C(2,3)$.

II. المعادلة الديكارتية لمستقيم:

نشاط:

نعتبر في المستوى المنسوب الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ النقط $A(1,-3)$ و $B(-2,1)$.

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستقيم (AB).

1) ماذا يمكن القول عن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$؟
2) حدد قيمة $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})$.
3) حدد $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})$ بدلالة x و y.

المعادلة $4x+3y+5=0$ تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) الموجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}$.

تعريف:

كل مستقيم في المستوى له معادلة ديكارتية تكتب على شكل $ax+by+c=0$ بحيث $(a,b)\neq(0,0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$.

تطبيق:

اكمل الجدول التالي:

المعادلة الديكارتية للمستقيم (D)	متجهة موجهة للمستقيم (D)
$y+3x-2=0$	$\vec{u}(\dots,\dots)$
	$\vec{u}(2,1)$
$x-3=0$	$\vec{u}(\dots,\dots)$

ملاحظة: نرمز عادة للمستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$ بالرمز $D(A,\vec{u})$.

ذ.لطرش عبد الكبير

تطبيق:

1) حدد المعادلة الديكارتية للمستقيم المار من النقطة $A(1,3)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(2,2)$.

2) اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)المار من النقطتين $B(1,3)$ و $C(1,3)$.

III. تمثيل بارامتري لمستقيم:

نشاط:

نعتبر في المستوى المنسوب الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ المستقيم (D) المار من النقطة $A(3,4)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(2,1)$ و$M(x,y)$ نقطة من (D).

1) بين وجود عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

2) اكتب كلا من xوy بدلالة t.

النظمة $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

تطبيق:

نعتبر المستوى المنسوب الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) اوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطتين $M(2,1)$ و $N(1,-3)$.

2) اعط معادلة ديكارتية للمستقيم $(D):\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

IV. الوضع النسبي لمستقيمين :

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين موجهتين لمستقيمين (D) و (Δ)في مستوى الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- يكون $(D) // (\Delta)$ اذا وفقط اذا كان $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
- يكون (D)و (Δ) متقاطعان اذا وفقط اذا كان $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

تطبيق:

ادرس الوضع للنسبي للمستقيمين (D_1) و (D_2) ثم حدد نقطة تقاطعما في حالة ماكانا متقاطعان في كل حالة من الحالات التالية:

- الحالة ❶: $(D_1): 3x - 4y + 1 = 0$ و $(D_2): x - y + 7 = 0$.
- الحالة ❷: $(D_1): \frac{1}{2}x - y = 0$ و $(D_1):\begin{cases} x = \sqrt{2} - 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

تمرين:

نعتبر في المستوى الى معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ النقط $A(1,2)$ و $B(2,1)$ و $C(1,0)$ و (T) المستقيم المعرف بالمعادلة الديكارتية التالية: $(T): x + y - 3 = 0$

1) حدد احداثيات النقطة $D(a,b)$ لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

2) هل النقط A وB و C تنتمي الى المستقيم (T)؟

3) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D_1) المار من A و الموازي ل(BC).

4) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D_2) المار من C و الموازي (AB).

5) بين ان المستقيمين (D_1) و (D_2) متقاطعان في النقطة D.

6) ارسم المستقيمين (D_1) و (D_2) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ و تحقق من النتيجة المحصل عليها من السؤال السابق مبيانيا.

المحتوى	ملاحظات

I. تعريف الحدوديات:

نشاط:

لتكن $(x-1)$ و $(x+1)$ و $(x+3)$ ابعاد متوازي مستطيلات و $P(x)$ حجمه. حدد $P(x)$ بدلالة x.

التعبير x^3+3x^2-x-3 يسمى حدودية من الدرجة الثالثة (اكبر اس) و -3 وxو$3x^2$و x^3 تسمى حدود هذه الحدودية.

- نرمز لدرجة الحدودية بالرمز deg ونكتب $\deg(P(x))=3$.
- العدد 3 هو معامل الحد من الدرجة الثانية و العدد -1من الدرجة الاولى و العدد -3هو معامل الحد من الدرجة الصفر.

تطبيق:

املا الجدول التالي بما يناسب :

التعابير	حدودية		في حالة $\deg(P(x))$	معمل الحد من الدرجة	
	نعم	لا	الاجابة بنعم	الاولى	الصفر
$x^6+24x^2+\frac{\sqrt{2}}{5}$					
$x^4-\lvert x\rvert+4$					
$2x^2+\sqrt{x}+2$					
6					
$2\left(\frac{1}{x}\right)^2+x$					
0					

II. العمليات على الحدوديات:

نشاط:

1)-هل الحدوديات $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتان في الحالتين التاليتين؟(علل اجابتك)

الحالة ❶: $P(x)=x^4+2x^2+x$ و $Q(x)=2x^2+x$.

الحالة ❷: $P(x)=x(x+1)^2-x^2+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+x+1$.

1)-حدد الشكل العام لحدودية من الدرجة الثانية محددا شرطا اساسيا حول احد عواملها.

خاصية:

تكون حدوديتين متساويتين اذا كان لهما نفس الدرجة ومعاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

تطبيق:

نعتبر الحدوديتين التاليتين: $P(x)=4x^2-(b-3)x$ و $Q(x)=ax^2+2x+c$.

حدد الاعداد a و b و c لكي تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتان.

نشاط:

1) لتكن الحدوديتين $P(x)=4x^2-3x+1$ و $Q(x)=-3x^2+x$. احسب $Q(x)+P(x)$ و$P(x)-Q(x)$

2) احسب $Q(x)\times P(x)$ ثم قارن $\deg(Q(x))+\deg(P(x))$ و$\deg(P(x)\times Q(x))$.

خاصية:

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان و k عددا حقيقيا. لدينا:

$\deg(kP(x))=\mathrm{k}*\deg(P(x))$

ذ.لطرش عبد الكبير

$\deg(P(x) \times Q(x)) = \deg(Q(x)) + \deg(P(x))$

تطبيق:

حدد درجة $Q(x)$ ثم حدد تعبيرها اذا علمت ان: $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = (x^2+1)Q(x)$.

III. جذر حدودية- القسمة على $x - a$:

نشاط:

1) نعتبر الحدودية التالية: $P(x) = 5x^3 + 5x^2 - 10x$.

حدد من بين الاعداد -1 ، $\sqrt{2}$، **1 التالية تلك التي تحقق** $P(a) = 0$.

ليكن a عددا حقيقيا. نقول ان العدد a جذر للحدودية $Q(x)$ اذا كان $Q(a) = 0$.

2) تحقق ان 0 جذر للحدودية $P(x)$.

تطبيق:

حدد العدد a بحيث يكون 2 جذرا للحدودية $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + 6$.

نشاط:

1) نعتبر الحدودية $P(x) = x^3 - x - 6$.

أ) احسب $P(1)$.

ب) احسب الحدودية $Q(x)$ بحيث $P(x) - P(1) = (x-1)Q(x)$.

الحدودية $Q(x)$ تسمى خارج القسمة الاقليدية ل$P(x)$ على $(x-1)$، والعدد $P(1)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية ل$P(x)$ على $(x-1)$.

2) بنفس الطريقة حدد باقي وخارج القسمة الاقليدية ل$P(x)$ على $(x-2)$.

خاصية:

لتكن $P(x)$ **حدودية و** n**درجتها و** a **عدد حقيقي.**

- **توجد حدودية** $Q(x)$ **درجتها** $n-1$ **بحيث** $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$.
- **الحدودية** $Q(x)$ تسمى خارج القسمة الاقليدية ل$P(x)$ على $(x-a)$، والعدد $P(a)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية ل$P(x)$ على $(x-a)$.
- $P(x)$قابلية **للقسمة** $(x-a)$ اذا وفقط اذا كان a جذر للحدودية $P(x)$.

تطبيق:

انجز القسمة الاقليدية القسمة **للحدودية** $P(x)$ على $x - a$ محددا الخارج و الباقي في كل حالة من الحالات التالية:

الحالة ❶: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 45$ و $a = 3$.

الحالة ❷: $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$ و $a = 2$.

تمرين توليفي:

نعتبر الحدودية التالية: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1) بين ان $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-1)$
2) حدد $Q(x)$ بطريقتين مختلفتين بحيث $P(x) = (x-1)Q(x)$.
3) بين ان 3 جذر ل $Q(x)$.
4) عمل الحدودية$Q(x)$.
5) استنتج تعميلا للحدودية$P(x)$.

المحتوى	ملاحظات

I. المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى بمجهول واحد:

1) عموميات:

نشاط:

1) -حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$(E_1): \frac{3x+1}{2} = x - \frac{x-1}{2}$	$(E_2): 2x+4 = 3(x-2) - x + 8$
$(E_3): \sqrt{2}(x-3)+1 = 1-\sqrt{2}(3-x)$	$(E_4): 4x^2 - 25 = 0$
$(E_5): \frac{3x-1}{2x+3} = 0$	$(E_5): \lvert 2x+3 \rvert = \lvert x-2 \rvert$

2) -ناقش حسب قيم m حلول المعادلة التالية: $mx + 5 = x - 1$.

نشاط:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

- $(E'_1): -4x + 7 \leq 2x + 14$
- $(E'_2): 2(x-1) - (3x-5) \leq 6x + 7 + 4(x-3)$
- $(E'_3): 5(3x-1) - (5x-4) \leq -4x + 10 - 7(2x+3)$

2) إشارة الحدانية $ax + b$:

نشاط:

1) - أ- حل المتراجحتين $3x + 4 \geq 0$ و $3x + 4 \leq 0$.

ب- املء الجدول التالي باستعمال: "+" و "−"

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x+4$		...	O	...	

الجدول اعلاه يسمى **جدول إشارة** الحدانية $3x + 4$.

2) - ضع جدول إشارة الحدانية $-2x + 4$.

خاصية:

جدول اشارة الحدانية $ax + b$ هو :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	O	إشارة a	

تطبيق:

1) - ضع جدول اشارة التعابير التالية:

$A(x) = -3x + 6$	$B(x) = (-4x+6)(5x-3)$	$C(x) = \frac{-3x+9}{2x+6}$

2) - ستنتج حلول المتراجحات التالية: $B(x) \leq 0$ و $C(x) \succ 0$

ذ.لطرش عبد الكبير

تمرين:

1) - حل في IR المتراجحات التالية:

- $2x(-3x+1)+(x-1)(-3x+1)\succ 0$
- $\frac{x+4}{-x+5}\leq 3$

2) -أكتب بدون رمز القيمة المطلقة التعبير $A(x)=|3-9x|+|4x+2|$ ثم حل المعادلة $A(x)=2x-4$

II. المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1) عموميات:

نشاط:

اتمم التعابير التالية :

- $x^2+6x-1=(x+3)^2...$
- $x^2-3x+4=(x-\frac{3}{2})^2...$

هذه الكتابة تسمى **بالشكل القانوني** للحدوديتين x^2+6x-1 و x^2-3x+4.

بشكل عام نعتبر ثلاثية الحدود ax^2+bx+c حيث a و b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$. لدينا:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$
$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{(2a)^2}\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$$

للتبسيط نضع $\Delta=b^2-4ac$ وبالتالي نجد: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$.

العدد Δ يسمى مميز الحدودية ax^2+bx+c.

خاصية:

لحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ نحسب المميز $\Delta=b^2-4ac$. لدينا الحالات التالية:

- إذا كان $\Delta<0$ فإنه ليس للمعادلة حل في IR ونكتب: $S=\emptyset$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن للمعادلة حلا وحيدا في IR هو $-\frac{b}{2a}$ ونكتب: $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
- إذا كان $\Delta>0$ فإن للمعادلة حلين في IR هما $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ونكتب $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

- $(E_1):2x^2+2x-12=0$
- $(E_2):5x^2-4x+2=0$
- $(E_3):3x^2-4x=0$
- $(E_4):3x^2+4=0$
- $(E_5):x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

تمرين:

حل المعادلة التالية $(E):2x^2-2x-4=0$ ثم استنتج حلول المعادلات التالية:

- $(E'):2x^4-2x^2-4=0$

- $(E'''): 2x^2 - 2|x| - 4 = 0$
- $(E'''): 2x - 2\sqrt{x} - 4 = 0$

2) تعميل ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية:

خاصية:

نعتبر ثلاثية الحدود $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ و Δ ممزيها. لدينا الحالات التالية:

- إذا كان $\Delta < 0$ فإنه لا يمكن تعميل الحدودية $p(x)$.
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $p(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ بحيث: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

تطبيق:

عمل إن أمكن الحدوديات التالية:

- $P_1(x) = 2x^2 + 2x - 12$
- $P_2(x) = 5x^2 - 4x + 2$
- $P_3(x) = 3x^2 - 4x$
- $P_4(x) = 3x^2 + 4$
- $P_5(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

تمرين:

عمل الحدودية $x^3 + x^2 - 2$ إذا علمت أن 1 جذر لها.

خاصية:

إذا كان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ حلان x_1 و x_2 فانهما يحققان:

$x_2 + x_1 = -\frac{b}{a}$ و $x_2 \times x_1 = \frac{c}{a}$.

تطبيق:

اذا علمت ان 1 حل للمعادلة $2016x^2 - 2017x + 1 = 0$ أوجد الحل الثاني.

حل النظمة التالية: $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 12 \end{cases}$

3) إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

نعلم أن $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$.

♣ اذا كان $\Delta < 0$ فان $-\frac{\Delta}{(2a)^2} > 0$ و منه $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} > 0$ وبالتالي اشارة $ax^2 + bx + c$ هي اشارة a.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	إشارة a

♣ إذا كان $\Delta = 0$ فان $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ إذن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي اشارة العدد a.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	O	إشارة a

ذ.لطرش عبد الكبير

♣ إذا كان $\Delta > 0$ فان $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ بحيث x_1 و x_2 هما حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

لندرس إشارة $a(x-x_1)(x-x_2)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		إشارة a	0	إشارة $-a$	0	إشارة a	

تطبيق:

1) - أعط جدول إشارة الحدوديات التالية:

- $P_1(x)=2x^2+2x-12$
- $P_2(x)=5x^2-4x+2$
- $P_3(x)=3x^2-4x$
- $P_4(x)=3x^2+4$
- $P_5(x)=x^2-2\sqrt{3}x+1$

2) - استنتج حلول المتراجحات التالية:

- $P_1(x)\geq 0$
- $P_3(x)\leq 0$
- $P_4(x)\prec 0$
- $\dfrac{P_3(x)}{P_1(x)}\geq 0$

3) - أكتب بدون رمز القيمة المطلقة التعبير التالي: $A(x)=|P_1(x)|+|P_3(x)|$.

III. المعادلات و المتراجحات و النظمات من الدرجة الأولى بمجهولين:

1) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

تعاريف:

- $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) بحيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$.
- كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax+by+c=0$ بحيث a و b و c اعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.
- الزوج (x_0,y_0) حلل للمعادلة $ax+by+c=0$ إذا وفقط إذا كان $ax_0+by_0+c=0$.

تطبيق:

1) - حدد من بين الأزواج $(1,2)$،$(0,3)$، $(3,0)$ ، $(1,\frac{9}{2})$ تلك التي تحل المعادلة $3x-2y+6=0$.

2) - حدد العدد a بحيث يكون الزوج $(1+a,a)$ حل للمعادلة $2x+y-1=0$.

3) - حل في IR^2 المعادلات التالية:

- $2x-3y+3=0$
- $4x+4y=8$

2) النظمات من الدرجة الأولى بمجهولين:

ذ.لطرش عبد الكبير

نشاط:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

نعتبر النظمة $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a،b،c،a'،c'،b' أعداد حقيقية.

- العدد $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S).
- إذا كان $D\neq 0$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}^2$ (x_0,y_0) بحيث: $x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$.
- اما اذا كانت $D=0$ فان النظمة اما يكون لها عدد غير منته من الحلول او ليس لها حل في $\mathbb{R}^2$:
  - اذا كان: $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-bc'=0$ و $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c=0$ فان النظمة لها ما لا نهاية من الحلول في $\mathbb{R}^2$.
  - اذا كان $D_x\neq 0$ او $D_y\neq 0$ فان النظمة ليس لها حل على الاطلاق في $\mathbb{R}^2$.

تعريف وخاصية:

تطبيق:

1) - حل في IR^2 النظمات التالية:

- $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 3x+y=11 \end{cases}$
- $\begin{cases} -x+3y=4 \\ x-2y=11 \end{cases}$

2) - استنتج حلول النظمات التالية:

- $\begin{cases} -|x+1|+3y^2=4 \\ |x+1|-2y^2=11 \end{cases}$
- $\begin{cases} -\sqrt{x}+\frac{3}{y}=4 \\ \sqrt{x}-\frac{2}{y}=11 \end{cases}$

3) المتراجحات و التجويه:

نشاط:

نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة $3x-2y+1=0$.

1) انشئ المستقيم في معلم متعامد ممنظم.

2) من بين الأزواج التالية : $(0,0)$،$(1,0)$،$(1,0)$ ، $(-1,1)$ حدد تلك التي تحقق $3x-2y+1>0$ و تلك التي تحقق $3x-2y+1\leq 0$.

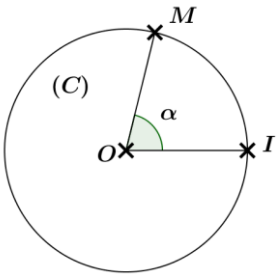
تطبيق:

1) حل مبيانيا المتراجحة التالية $x-y+2>0$.

2) حل مبيانيا المتراجحة التالية: $\begin{cases} x+y>2 \\ x+2y\leq 3 \end{cases}$.

ملاحظات	الحساب المثلثي – الجزء الأول-

I. وحدات قياس الزوايا: الراديان- الغراد



لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R. ولتكن I و M نقطتين من (C) و α قياس الزاوية $I\hat{O}M$: $I\hat{O}M = \alpha°$ و $0 \le \alpha \le 360°$.

⊗ **لنحدد 1 طول القوس IM:**

نعلم أن طول (محيط الدائرة (C)) يساوي $2\pi R$.

اذن:
$$2\pi R \leftrightarrow 360°$$
$$l \leftrightarrow \alpha°$$

وبالتالي $l = \frac{2\alpha\pi R}{360} = \frac{\alpha\pi R}{180}$.

سنهتم فيما يلي بقياس الزاوية $I\hat{O}M$ ولذلك سنضع $R = 1$.

تعريف:

لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها $R = 1$ I و M نقطتين منها.
قياس الزاوية الهندسية $I\hat{O}M$ بالراديان radien هو طول القوس IM.

ملاحظة:

$1rad$ هو قياس زاوية تحصر قوسا على الدائرة $C(O,1)$ طوله 1.

تناسب وحدات قياس الزوايا:

هناك ثلاث وحدات قياس الزوايا هي الدرجة، الراديان و الغراد.

قياس زاوية مستقيمية بالدرجة هو $180°$ وبالراديان هو π وأما بالغراد فهو $200gr$.

يعني أن: $180^0 = \pi rad = 200gr$

خاصية:

إذا كان x قياس زاوية بالدرجة و y قياسها بالراديان و z قياسها بالغراد فإن:
$$\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}.$$

مثال:

ليكن بالراديان قياس زاوية قياسها بالدرجة هو $45°$.

نعلم أن:
$$\pi \leftrightarrow 180°$$
$$a \leftrightarrow 45°$$

إذن $a = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad$.

تطبيق:

املأ الجدول التالي:

القياس بالدرجة	0	30	45	60	90		120		360
القياس بالراديان						$\frac{\pi}{8}$		$\frac{4\pi}{5}$	

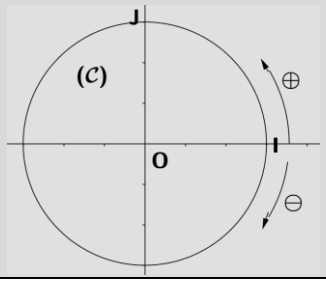
II. الدائرة المثلثية- الافاصيل المنحنية:

1) الدائرة المثلثية:

ذ.لطرش عبد الكبير

تعريف:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$، الدائرة المثلثية (C) هي دائرة مركزها O (أصل المعلم) و شعاعها $R=1$ ومزودة بنقطة أصل I وموجهة توجيها موجبا (عكس عقارب الساعة).



2) الافاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية:

تعريف:

نعتبر الدائرة المثلثية (C) المرتبطة بالمعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

كل عدد حقيقي α يمثل على الدائرة المثلثية بنقطة وحيدة M. α يسمى افصولا منحنيا للنقطة M ونكتب $M(\alpha)$.

ملاحظة:

⊗ إذا كان α أفصولا منحنيا لنقطة M فإن كل عدد يكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هو الاخر أفصول منحن للنقطة M .

⊗ إذا كان $\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]$ فإن α يسمى **الأفصول المنحني الرئيسي** للنقطة M .

مثال:

لنحدد أفصولا منحنيا للنقطة $M\left(\frac{37\pi}{3}\right)$.

طريقة ①:

لدينا $\frac{37\pi}{3}=\frac{36\pi+\pi}{3}=12\pi+\frac{\pi}{3}$. إذن الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M هو $\frac{\pi}{3}$.

طريقة ②:

ليكن α_0 الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M. لدينا $\frac{37\pi}{3}=\alpha_0+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: $\alpha_0=\frac{37\pi}{3}-2k\pi$ ، وحيث أن: $-\pi\prec\alpha_0\leq\pi$ فإن : $-\pi\prec\frac{37\pi}{3}-2k\pi\leq\pi$.

وبالتالي: $\frac{34}{6}\leq k\prec\frac{40}{6}$ أي أن $5,66\leq k\prec 6,66$

بما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=6$. ومنه الافصول المنحني الرئيسي ل M هو $\alpha_0=\frac{37\pi}{3}-2\times6\pi=\frac{\pi}{3}$.

تطبيق:

مثل على الدائرة المثلثية النقط التالية:

$A(0)$	$B(\frac{\pi}{3})$	$C(\frac{\pi}{2})$	$D(-\frac{\pi}{3})$	$E(\pi+\frac{\pi}{3})$

$M\,(103\pi)$	$L\,(20\pi)$	$K\,(2\pi)$	$G\,(\frac{5\pi}{6})$	$F\,(\pi-\frac{\pi}{3})$

تمرين: تمرين 2 من السلسلة

1) - حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقط التالية ثم مثلها على الدائرة المثلثية:

$C\,(\frac{2017\pi}{3})$	$B\,(\frac{-21\pi}{4})$	$A\,(\frac{15\pi}{6})$
$F\,(-\frac{23\pi}{6})$	$E\,(-\frac{65\pi}{7})$	$D\,(\frac{253\pi}{12})$

2) - حدد جميع الافاصيل المنحنية للنقطة $N\,(\frac{-17\pi}{3})$ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},3\pi\right]$.

نتيجة:

العددان x و y أفصولان منحنيان لنفس النقطة إذا وفقط إذا وجد عدد نسبي k بحيث: $x-y=2k\pi$.
ونكتب $x\equiv y\,[2\pi]$ وتقرأ x توافق y بترديد 2π.

تطبيق:

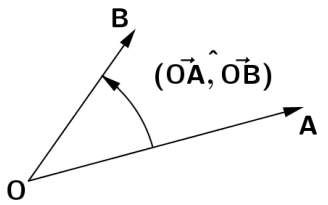
هل العلاقة $x\equiv y\,[2\pi]$ صحيحة في الحالات التالية:

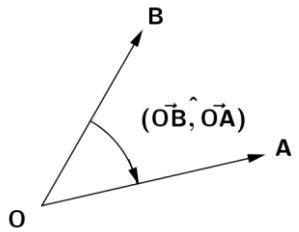
- $x=\frac{43\pi}{12}$ و $-\frac{5\pi}{12}$.
- $x=\frac{-13\pi}{8}$ و $y=\frac{\pi}{5}$.

III. الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل- الزاوية الموجهة لمتجهتين :

نعتبر المستوى الموجه توجيها مباشرا والمنسوب إلى م.م.م $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ و لتكن A و B نقطتين منه.
الزاوية التي رأسها O والمحددة بنصفي المستقيمين: $[OA)$ و $[OB)$ تسمى زاوية موجهة لنصفي مستقيم نرمز لها بالرمز $(\widehat{OA;OB})$.

هذه الزاوية تسمى أيضا الزاوية الموجهة المحددة بالمتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ونرمز لها بالرمز $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$.



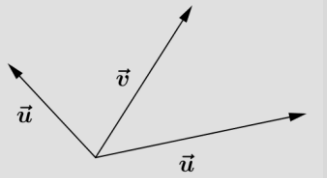


ملاحظة:

- ⊗ إذا كان α قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ فإن كل عدد يكتب على شكل $\alpha+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ هو ايضا قياس لهذه الزاوية. نكتب اذا: $\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}\equiv\alpha[2\pi]$.
- ⊗ إذا كان $\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]$ فإن يسمى **القياس الرئيسي** للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$.

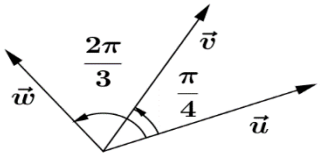
خاصية: (علاقة شال)

إذا كانت $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ ثلاث متجهات غير منعدمة فإن: $\left(\overline{\vec{U},\vec{V}}\right)+\left(\overline{\vec{V},\vec{W}}\right)=\left(\overline{\vec{U},\vec{W}}\right)[2\pi]$



تطبيق:

حدد قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{v};\vec{w})$ حيث:



نتيجة:

ليكن عددان $A(\alpha)$ و $B(\beta)$ نقطتين على الدائرة المثلثية (C) المرتبطة بالمعلم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

لدينا: $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

تطبيق:

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I ومرتبطة بمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ ولتكن $M\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$ و $N\left(\frac{445\pi}{6}\right)$ نقطتان من (C).

1) أوجد الأفصولين المنحنيين الرئيسيين للنقطتين M و N.

2) بين أن: $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ثم استنتج طبيعة المثلث OMN.

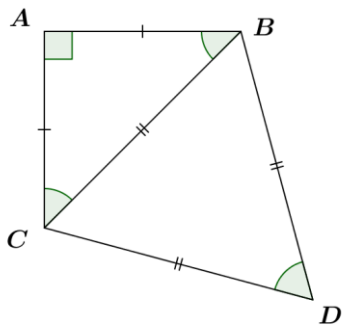
خاصية:

لتكن $\left(\vec{U},\vec{V}\right)$ زاوية موجهة، لدينا:

- $\left(\overline{\vec{U},\vec{V}}\right)\equiv-\left(\overline{\vec{V},\vec{U}}\right)[2\pi]$
- $\left(\overline{-\vec{U},-\vec{V}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{U},\vec{V}}\right)[2\pi]$
- $\left(\overline{-\vec{U},\vec{V}}\right)\equiv\pi+\left(\overline{\vec{U},\vec{V}}\right)[2\pi]$

تطبيق: تمرين 6 من السلسلة:

نعتبر في المستوى المثلثان ABC و BDC الممثلان في الشكل التالي:



حدد القياس الرئيسي للقياسات التالية:

$\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ ؛ $\overline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})}$ ؛ $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ ؛ $\overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DB})}$ ، $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DB})}$.

IV. النسب المثلثية لعدد حقيقي:

نشاط:

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $AB=3$ و $BC=4$.

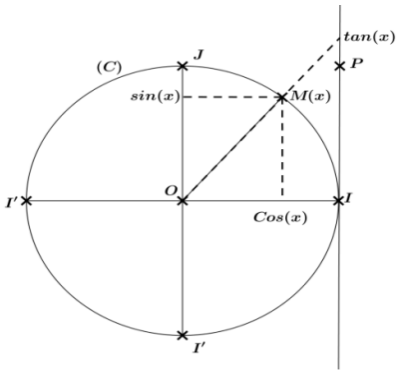
1) -أحسب المسافة AC.

2) -أحسب $\sin\hat{B}$ و $\cos\hat{B}$ ثم $\tan\hat{B}$.

1) جيب- جيب تمام- ظل عدد حقيقي:

لتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O وأصلها I، و$\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ المعلم المتعامد الممنظم المباشر (يعني $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$) المرتبط بها. ولتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها.

وليكن (Δ) المستقيم المار من I و الموازي ل (OJ).



تعريف:

نسمي أرتوب النقطة M في المعلم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ **بجيب** العدد الحقيق x ونرمز له بالرمز $\sin(x)$.

نسمي أفصول النقطة M في المعلم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ **بجيب تمام** العدد الحقيق x ونرمز له بالرمز $\cos(x)$.

نفترض أن M تخالف J و J' .

أفصول النقطة T تقاطع (Δ) و (OM) في المعلم (I,P) يسمى ظل العدد x ويرمز له ب $\tan x$.

أمثلة:

لنحدد جيب وجيب تمام للأفاصيل المنحنية للنقط $I(0)$، $J(\frac{\pi}{2})$، $I'(\pi)$ و $J'(-\frac{\pi}{2})$.

في المعلم $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ لدينا :

- إحداثيات النقطة I هو الزوج $(1;0)$ وبالتالي: $\cos(0)=1$ و $\sin(0)=0$؛
- إحداثيات النقطة J هو الزوج $(0;1)$ وبالتالي: $\cos(\frac{\pi}{2})=0$ و $\sin(\frac{\pi}{2})=1$؛
- إحداثيات النقطة I' هو الزوج $(-1;0)$ وبالتالي: $\cos(\pi)=-1$ و $\sin(\pi)=0$؛
- إحداثيات النقطة J' هو الزوج $(0;-1)$ وبالتالي: $\cos(-\frac{\pi}{2})=0$ و $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$.

نتائج:

لكل عدد حقيقي x لدينا النتائج التالية:

⊗ $-1\leq\cos(x)\leq1$ و $-1\leq\sin(x)\leq1$؛

ذ.لطرش عبد الكبير

⊗ حسب مبرهنة فيتاغورس: $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$؛

⊗ نعلم أن x و $x+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$ افصولان منحنيان لنفس النقطة، إذن:

$\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$، $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ و $\tan(x+2k\pi)=\tan(x)$.

⊗ لكل x يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$. لدينا:

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ و } 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

تطبيق: تمرين 7 من السلسلة.

1) -ليكن x عددا حقيقيا بسط التعابير التالية :

- $A(x)=1-(\cos(x)+\sin(x))^2$؛
- $B(x)=(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$؛
- $C(x)=\cos^2(x)-2\sin^2(x)-1$؛
- $D(x)=\sin^3(x)\cos(x)+\sin(x)\cos^3(x)$؛

2) -أحسب: $D(0)$، $D(\frac{\pi}{2})$، $D(\pi)$ و $D(17\pi)$.

تمرين: تمرين 8 من السلسلة.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

نضع $A=\cos^2(x)+3\cos(x)\sin(x)-2\sin^2(x)$.

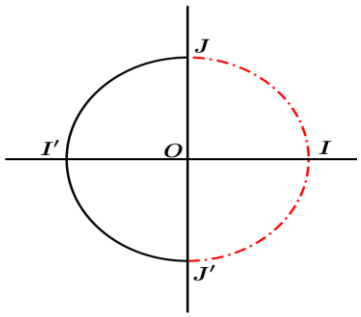
1) -بين أن: $A=\cos^2(x)(1+3\tan(x)-2\tan^2(x))$.

2) -إذا علمت أن $\tan(x)=1+\sqrt{2}$ ؛ أحسب A.

2) إشارة جيب- جيب تمام- ظل عدد حقيقي:

لتكن M نقطة من الدائرة المثلثية (C) و x أفصولا منحنيا لها:

إشارة $\cos(x)$ لكل x من IR :

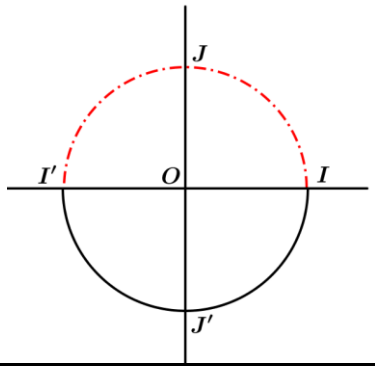


$\cos(x)\geq 0$ إذا كانت M من القوس الحمراء.

إذن إشارة $\cos(x)$ لكل x من المجال $]-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إشارة $\sin(x)$ لكل x من IR :



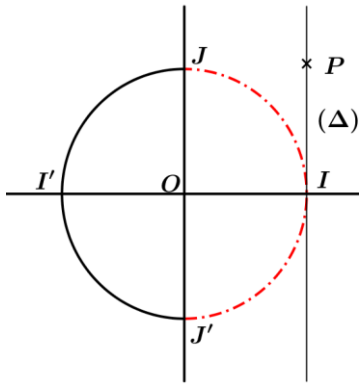
$\sin(x)\geq 0$ إذا كانت M من القوس الحمراء.

إذن إشارة $\sin(x)$ لكل x من المجال $]-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$\sin(x)$		$-$	0	$+$	

ذ.لطرش عبد الكبير

إشارة $\tan(x)$ لكل x من IR و $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}$:



$\tan(x) \geq 0$ إذا كانت M من القوس الحمراء.

إذن إشارة $\tan(x)$ لكل x من المجال $]-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$tan(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0

تطبيق: تمرين 10 من السلسلة.

1)- ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ بحيث $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. أحسب $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$.

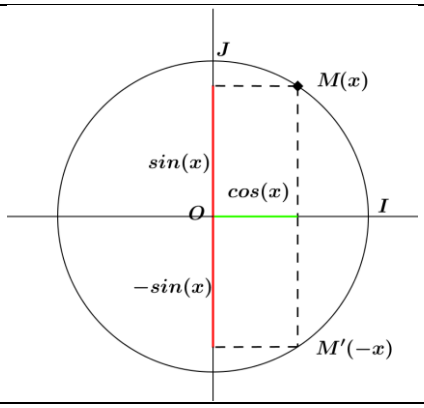
2)- ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ بحيث $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. أحسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$.

3)- علما أن: $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}-1$ ، بين أن $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ثم أحسب $\sin(\frac{\pi}{8})$.

3) علاقات بين النسب المثلثية:

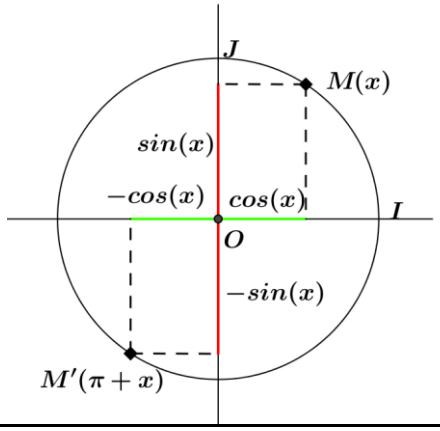
لكل عدد حقيقي x ، لدينا العلاقات التالية:

العلاقة بين x و $-x$



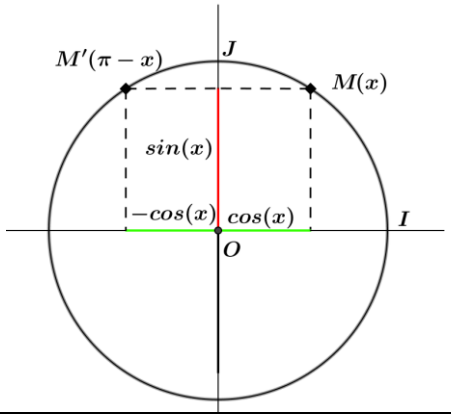
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ بحيث: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}$

العلاقة بين x و $\pi+x$



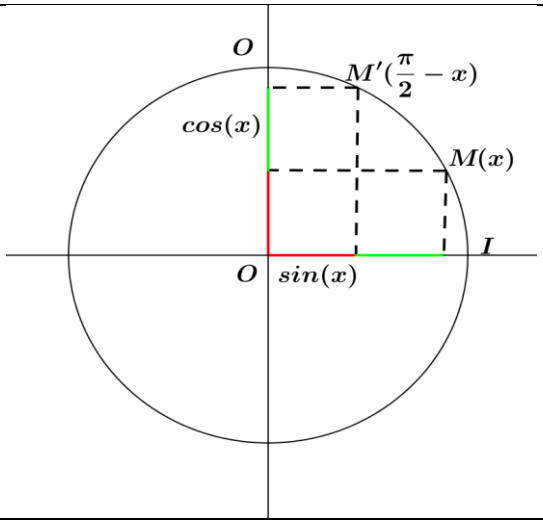
- $\cos(\pi+x)=-\cos x$
- $\sin(\pi+x)=-\sin x$
- $\tan(\pi+x)=\tan(x)$ بحيث: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

العلاقة بين x و $\pi-x$



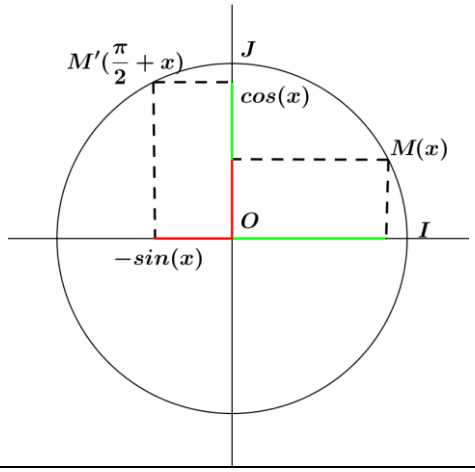
- $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
- $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
- $\tan(\pi-x)=-\tan(x)$ بحيث: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

العلاقة بين x و $\frac{\pi}{2}-x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}$ بحيث: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ و $x\neq k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

العلاقة بين x و $\frac{\pi}{2}+x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan(x)}$ بحيث: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ و $x\neq k\pi/k\in\mathbb{Z}$

تطبيق:

أحسب بدلالة $\cos(x)$ و $\sin(x)$ التعابير التالية:

- $A(x)=\sin(-x)-\cos(-x)+\sin(\pi+x)+\cos(\pi-x)$
- $B(x)=\sin(x+10\pi)-\cos(3\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$
- $C(x)=4\sin(x+7\pi)-2\sin(13\pi-x)+\cos(\frac{5\pi}{2}-x)$
- $D(x)=\tan(5\pi+x)+\tan(5\pi-x)+\tan(\frac{\pi}{2}-x)$
- $E(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\pi-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)\sin(\pi-x)$

4)النسب المثلثية لبعض الزوايا الاعتيادية :

لدينا الجدول التالي:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

تطبيق:

أحسب $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$، $\sin(\frac{65\pi}{4})$ و $\tan(\frac{19\pi}{6})$

تمرين: تمرين 13 من السلسلة.

ذ.لطرش عبد الكبير

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

نضع $A(x)=\sin(x)(\cos^2(x)-\sin^2(x))$.

1) -أحسب $A(0)$ ، $A(\frac{\pi}{4})$، $A(-\frac{\pi}{4})$، $A(\frac{\pi}{6})$و $A(\frac{5\pi}{6})$.

2) -بين أنه لكل x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$: $A(\frac{\pi}{2}-x)=A(\frac{\pi}{2}+x)$

تمرين: تمرين 15 من السلسلة.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

نضع $A=2\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\sqrt{3}\sin(\pi-x)+\cos(\pi-x)$

$B=\sqrt{3}\cos^3(x)+\sqrt{3}\cos(x)\sin^2(x)+\sin(x)$.

1) -بين أن: $A=\cos x+\sqrt{3}\sin(x)$ و أن: $B=\sqrt{3}\cos x+\sin(x)$

2) -أ-حل في IR^2 النظمة التالية: $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x+y=2 \end{cases}$

ب- حدد x علما أن: $A=\sqrt{3}$ و $A=2$

V. المعادلات و المتراجحات المثلثية الأساسية:

1) المعادلة : ☐ و المتراجحات ☐ و ☐ بحيث

☐

نشاط:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ مرتبط بدائرة مثلثية (C) .

1) هل توجد أعداد حقيقية x تحقق :

a) $\cos(x)=4$ b) $\cos(x)=\frac{-3}{2}$.

2) أ- مثل على الدائرة المثلية النقط التي أفاصيلها المنحنية x بحيث $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ب- حدد افاصيل هذه النقط في المجال $]-\pi,\pi]$ ثم في المجال $[0,2\pi]$.

3) أ- لون النقط من الدائرة المثلثية التي أفاصيلها المنحنية x تحقق $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ب- استنتج حلول المتراجحة $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المجال $]-\pi,\pi]$.

خاصية:

ليكن x و a عددين حقيقيين. نعتبر المعادلة : $(E):\ \cos x=a$

⊗ إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإنه ليس للمعادلة (E) حل في $\mathbb{R}$.

⊗ إذا كان $-1\leq a\leq 1$ فإنه يوجد عنصر α من المجال IR بحيث $\cos\alpha=a$ وبالتالي حلول المعادلة

ذ.لطرش عبد الكبير

(E) في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$.

ونكتب $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

مثال:

⊗ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E) : \cos x = \frac{1}{2}$

لدينا $-1 < \frac{1}{2} < 1$ إذن يوجد α من المجال $]0;\pi[$ بحيث: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

ونعلم أن $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ إذن S مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي:

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

⊗ لنحل حلول هذه المعادلة في المجال $[-\pi,\pi]$.

بما أننا نحل المعادلة في المجال $[-\pi,\pi]$ فإن:

$-\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ أو $-\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$

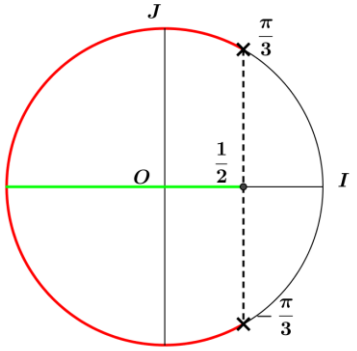
لدينا $-\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ تكافئ $-\frac{4}{6} \le k \le \frac{2}{6}$ تكافئ $k = 0$ ومنه $x = \frac{\pi}{3}$.

و لدينا أيضا $-\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ تكافئ $-\frac{2}{6} \le k \le \frac{4}{6}$ تكافئ $k = 0$ ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$.

إذن S مجموعة حلول المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ في المجال $[-\pi;\pi]$ هي: $S = \left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$.

⊗ لنحل في $[-\pi,\pi]$ المتراجحة $(E') : \cos x \le \frac{1}{2}$

بالنظر للدائرة المثلثية، نجد:



وبالتالي حلول هذه المتراجحة في المجال $[-\pi,\pi]$ هي:

$$S = \left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$$

معادلات خاصة:

⊗ $\cos x = 1$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

⊗ $\cos x = -1$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تطبيق:

1) حل في المجال $[0;\pi]$ المعادلات و المتراجحات التالية:

• $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	• $2\cos x + \sqrt{2} = 0$	• $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
• $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$	• $2\cos x + \sqrt{2} \prec 0$	• $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) نعتبر: $A(x) = 2\cos^2(x) - 3\sqrt{3}\cos(x) + 3$

أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2 - 3\sqrt{3}x + 3 = 0$.

ب- استنتج حلول المعادلة $A(x) = 0$ ثم المتراجحة $A(x) \le 0$ في المجال $[0,3\pi]$.

2) المعادلة : [ ] و المتراجحات [ ] و [ ] بحيث

نشاط:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ مرتبط بدائرة مثلثية (C) .

1) هل توجد أعداد حقيقية x تحقق :

a) $sin(x)=\sqrt{3}$ b) $\cos(x)=\frac{-5}{2}$.

2) أ- مثل على الدائرة المثلية النقط التي أفاصيلها المنحنية x بحيث $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ب- حدد افاصيل هذه النقط في المجال $]-\pi,\pi]$ ثم في المجال $[0,2\pi]$.

3) حل في المجال $[0,2\pi]$ المتراجحة $\sin(x)\succ\frac{\sqrt{3}}{2}$

خاصية:

ليكن x و a عددين حقيقيين. نعتبر المعادلة : $(E):\ \sin x=a$

⊗ إذا كان $a>1$ أو $a<-1$ فإنه ليس للمعادلة (E) حل في $\mathbb{R}$.

⊗ إذا كان $-1\le a\le 1$ فإنه يوجد عنصر α من المجال IR بحيث $sin\,\alpha=a$ وبالتالي حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي $x=\alpha+2k\pi$ أو $x=\pi-\alpha+2k\pi$.

ونكتب $S=\{\alpha+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$.

مثال:

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E')\ :\ \sin x=\frac{1}{2}$

لدينا $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ إذن حلول المعادلة (E') في $\mathbb{R}$ هي :

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث k من $\mathbb{Z}$.

وبالتالي: $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

معادلات خاصة:

⊗ $\sin x=1$ إذا وفقط إذا كان $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

⊗ $\sin x=-1$ إذا وفقط إذا كان $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تطبيق:

1) حل في المجال $[0;2\pi]$ ما يلي:

• $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	• $2\sin x+\sqrt{3}=0$	• $\sin x=\cos\frac{\pi}{8}$
• $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$	• $2\sin x+\sqrt{3}\ge 0$	• $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) المعادلة : و المتراجحات و بحيث

ذ.لطرش عبد الكبير

خاصية:

ليكن x و a عددين حقيقيين . نعتبر المعادلة .

يوجد عنصر x_0 من المجال $\mathbb{R}$ بحيث $\tan x_0 = a$.

حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية $x_0 + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ونكتب $S = \{x_0 + k\pi \in \mathbb{Z}\}$.

مثال:

لنحل في المجال المعادلة $\tan x = -1$

لدينا $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ إذن $\tan x = \tan(-\frac{\pi}{4})$

ومنه حلول المعادلة $\tan x = -1$ في المجال $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية $x_0 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-\pi;\pi]$ فإن $-\pi \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi$ تكافئ $k = 0$ أو $k = 1$

إذن S حلول المعادلة $\tan x = -1$ في المجال $[-\pi;\pi]$ هي: $S = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

تطبيق:

2) حل في المجال $[0;2\pi]$ ما يلي:

$I = [0;2\pi]$; $\tan x = \sqrt{3}$	$I = [0;2\pi]$; $\tan(x + \frac{\pi}{3}) + 1 = 0$
$I = [0;2\pi]$; $\tan x \geq \sqrt{3}$	$I = [-\pi;\pi]$; $\tan(x + \frac{\pi}{3}) + 1 < 0$

ملاحظات	المحتوى

I. مصطلحات:

1) الميزة الكمية:

نشاط:

كل ميزة إحصائية قيمها عبارة عن أعداد تسمى **ميزة احصائية كمية**

حصل تلاميذ أحد اقسام الجذع مشترك علوم على النقط التالية في الفرض الاول لمادة الرياضيات:

7	12	11,5	8	11,5	10	15	11,5	10	11,5
17	7	15	17	12	11,5	12	10	8	15
11,5	7	12	8	17	15	11,5	8	10	15

1) - ما هي الساكنة و الميزة الاحصائية المدروسة ؟

3) -حد العدد الاجمالي للتلاميذ (الحصيص الاجمالي N).

4) -كون جدولا إحصائيا للحصيصات و الترددات و النسب المئوية و الحصيصات المتراكمة.

5) -حدد عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة اقل او تساوي 12.

6) -مثل مبيانيا الحصيصات بمخطط بالعصي ثم مثل الحصيصات المتراكمة بمضلع.

7) - جمع هذه النقط في مجالات سعة كل منها 3 بدءا بالمجال [7,10[ثم انشئ مدراج الحصيصات للمتسلسلة المحصل عليها.

2) ميزة كيفية:

الميزة الكيفية هي كل ميزة لا يمكن التعبير عنها بأعداد

نشاط:

ترشح اربعة اشخاص للانتخابات الجماعية لإحدى الجماعات فكانت النتائج كالتالي:

المترشح	A	B	C	D
عدد الاصوات	410	1021	612	897

1) - حدد الساكنة و الميزة الاحصائية المدروسة.

2) -حدد الحصيص الاجمالي.

3) -انشئ جدولا احصائيا يضم الترددات والنسب المئوية.

4) -انشئ مخططا قطاعيا لهذه المتسلسلة.

II. وسيطات الوضع:

نشاط:

الكشف التالي الذي يعطي معطيات حول المدة الزمنية بالدقائق التي تستغرقها مجموعة من 20 تلميذا للوصول من منازلهم إلى المدرسة.

5	10	15	20	25	10	20	15	10	15
20	15	15	25	10	15	5	15	15	20

1) - كون جدولا للحصيصات و الحصيصات المتراكمة.

2) - حدد منوال هذه المتسلسلة ومعدلها الحسابي و قيمتها الوسطية.

3) - انشئ المخطط العصوي للحصيصات المتراكمة.

نشاط:

الجدول التالي تصنيفا ل 30 شابا بأحد النوادي الرياضية حسب اعمارهم.

السن	[16,20[	[20,24[	[24,28[	[28,32[
عدد الشبان	10	4	11	7

1) - أنشئ جدولا احصائيا يضم مركز الاصناف و الحصيصات المتراكمة.

2) - مثل مبيانيا هذه المتسلسلة.

3) - حدد منوال هذه المتسلسلة الاحصائية.

4) - احسب معدل اعمار هؤلاء الشبان.

5) - انشئ مضلع الحصيصات المتراكمة ثم حدد العمر الوسطي لهؤلاء الشبان.

خلاصة الانشطة:

- منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة او صنف للميزة لها اكبر حصيص.
- نعتبر متسلسلة احصائية مرتبة تزايديا. كل قيمة M تقسم المتسلسلة إلى جزئين لهما نفس الحصيص تسمى قيمة وسطية لهذه المتسلسلة.
- المعدل الحسابي لمتسلسلة إحصائية (x_i, n_i) بحيث $1 \le i \le p$ هو :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$$

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة معبر عنها بأصناف نعوض كل صنف $[a,b[$ بمركزه $c = \frac{a+b}{2}$ عند حساب المعدل الحسابية

III. وسيطات التشتت:

نشاط:

يعطي الجدولان التاليان النقط المحصل عليها في الفرض الاول لمادة الرياضيات لقسمين A و B يحتوي كل منهما على 17 تلميذا:

القسم A	النقط	8	9	10	11	12	13	14
	الحصيص	1	2	3	5	3	2	1

القسم B	النقط	2	5	7	8	10	11	12	14	15	17	20
	الحصيص	1	2	1	2	1	3	1	2	1	2	1

1) -بين ان للقسمين نفس المنوال و نفس المعدل ونفس القيمة الوسطية.

2) -مثل المخطط بالعصي لهاتين المتسلسلتين. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن نقط القسم A تتجمع حول القيمة 11 في حين تتشتت نقط القسم B بين 2 و 20.

"مقارنة المتسلسلتين الإحصائيتين A و Bاعتمادا على وسيطات الوضع ليس كافيا، إذن نحن بحاجة إلى حساب وسيطات أخرى تسمى وسيطات التشتت".

تعاريف:

نعتبر متسلسلة احصائية حصيصها الاجمالي N ومعدلها الحسابي $\bar{X}$ و تأخذ القيم x_1 ، x_2 ،....، x_p.

- الانحراف المتوسط هو العدد نرمز له بالرمز e و المعرف ب:

$$e = \frac{n_1 \times |x_1 - \bar{x}| + n_2 \times |x_2 - \bar{x}| + \ldots + n_i \times |x_i - \bar{x}|}{N}$$

- المغايرة هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بالرمز V والمعرف ب:

$$V = \frac{n_1 \times x_1^2 + n_2 \times x_2^2 + \ldots + n_p \times x_p^2}{N} - \bar{x}^2$$

- الانحراف الطرازي هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز σ و المعرف بما يلي: $\sigma = \sqrt{V}$.

ذ.لطرش عبد الكبير

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة معبر عنها بأصناف نعوض كل صنف $[a,b[$ بمركزه $c=\frac{a+b}{2}$ عند حساب وسيطات التشتت.

مثال:

نعتبر الجدول التالي الذي يوضح عدد الابناء عند ثلاثين أسرة:

عدد الابناء x_i	0	1	2	3	4
عدد الاسر n_i	6	5	8	5	6

- **المعدل الحسابي:** $\bar{x}=\frac{0\times6+1\times5+2\times8+3\times5+4\times6}{30}=2$

- **الانحراف المتوسط:**

لتحديد المغايرة نستعين بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4	
n_i	6	5	8	5	6	
$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	2	1	0	1	2	**المجموع**
$n_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	12	5	0	5	12	34

ومنه: $e=\frac{34}{N}=\frac{34}{30}=1,13$

- **المغايرة:**

لتحديد المغايرة نستعين بالجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4	
n_i	6	5	8	5	6	
x_i^2	0	1	4	9	16	**المجموع**
nx_i^2	0	5	32	45	96	178

لدينا: $V=\frac{178}{N}-\bar{x}^2=\frac{178}{30}-2^2=1,93$

- **الإنحراف الطرازي:**

$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{1,93}=1,39$

تمرين:

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

قيمة الميزة xi	1	2	5	6
الحصيص ni	3	6	2	7

حدد بالنسبة لهذه المتسلسلة الإحصائية كل من المعدل الحسابي و المغايرة و الانحراف الطرازي.

ملاحظات	Les fonctions numériques: الدوال العددية

ذ: لطرش عبد الكبير

I. عموميات: GENERALITES

1) دالة عددية لمتغير حقيقي: FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

نشاط:

نعتبر مستطيلا عرضه $(x-3)cm$ و وطوله $(x-2)cm$ حيث x عدد حقيقي. نسمي $f(x)$ مساحة هذا المستطيل.

1) حدد تعبير $f(x)$.

2) حدد مساحة هذا المستطيل إذا كان: $x=4$ و $x=5$.

3) حدد القيم الممكنة ل x إذا كان $f(x)=12$ ثم إذا كان $f(x)=20$.

تعريف:

ليكن D جزء من $\mathbb{R}$. نسمي دالة عددية f من D نحو $\mathbb{R}$ كل علاقة تربط بين كل عنصر x من D بعنصر وحيد y على الأكثر من $\mathbb{R}$ ، نرمز له بالرمز $f(x)$.

$$f : D \to IR$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

- العدد الحقيقي $y=f(x)$ يسمى **صورة** العدد x بالدالة f .
- العدد الحقيقي x يسمى **سابق** y بالدالة f .

تطبيق:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي و المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x^2-3$

1) حدد صورة الأعداد الحقيقية 1- و 1 و 2 .

2) حدد سوابق الأعداد الحقيقية الآتية إذا وجدت بالدالة f : 0 و 5 و 4-.

2) مجموعة تعريف دالة عددية: ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

نشاط:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي و المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

حدد صورة الأعداد الحقيقية التالية ان وجدت 0 و 1- و 1.

نقول إن العنصرين 1- و 1 لا ينتميان إلى مجموعة تعريف الدالة f .

إذن مجموعة تعريف الدالة هي مجموع الأعداد الحقيقية باستثناء العنصرين 1- و 1 ، ونكتب $D_f = IR \setminus \{-1,1\}$

تعريف:

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x التي تقبل صورة بالدالة f ، ويرمز لها عادة بالرمز D_f، ونكتب: $D_f = \{x \in IR / f(x) \in IR\}$.

ملاحظات:

- نقول إن f دالة عددية معرفة على I إذا كان I جزء من D_f .
- لتحديد مجموعة تعريف دالة عددية ينبغي إزالة جميع الأعداد التي من أجلها يكون المقام منعدما، أو ما بداخل الجذر سالبا.

تقنية:

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان. لدينا:

الدالة	مجموعة التعريف
$x \mapsto P(x)$	$D = IR$
$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \{x \in IR / Q(x) \neq 0\}$
$x \mapsto \sqrt{P(x)}$	$D = \{x \in IR / P(x) \geq 0\}$
$x \mapsto \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR / Q(x) \succ 0\}$
$x \mapsto \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D = \left\{x \in IR / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ و } Q(x) \neq 0\right\}$
$x \mapsto \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR / P(x) \geq 0 \text{ و } Q(x) \succ 0\}$

مثال:

لنحدد مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$.

لدينا: $D_f = \{x \in IR / x-2 \geq 0 \text{ et } x-4 \neq 0\} = \{x \in IR / x \geq 2 \text{ et } x \neq 4\} = [2,+\infty[\setminus \{4\}$

ومنه : $D_f = [2,4[\cup]4,+\infty[$.

تطبيق:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$f_1 : x \mapsto x^3 + 12x - 5$	$f_2 : x \mapsto \frac{-2x+4}{5x+3}$	$f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{2x^2+2x-4}$
$f_4 : x \mapsto \frac{4x^2-5}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$	$f_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x}}{\lvert x+2 \rvert - 3}$	$f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{4x+2}}$
$f_7 : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$		$f_8 : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-1}$

3) تساوي دالتين عدديتين: EGALITÉ DE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

تعريف:

لتكن f و g دالتان عدديتان و D_f و D_g مجموعتي تعريفهما.

نقول إن الدالتين f و g متساويتان إذا كان:

- $D_f = D_g$
- $f(x) = g(x)$ لكل x من D_f

مثال:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي:

$f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ و منه $D_f = D_g = \mathbb{R}$. ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$، لدينا: $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$

إذن $f = g$. وبالتالي الدالتين f و g متساويتين.

تطبيق:

هل الدالتان f و g متساويتين في الحالات التالية:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$

ذ: لطرش عبد الكبير

2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ و $g(x)=x-1$

3) $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ و $g(x)=x+1$

4) التمثيل المبياني لدالة عددية: REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

نعتبر خلال هذه الفقرة أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نشاط:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+1$. انشئ التمثيل المبياني للدالة f في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف:

نعتبر المستوى (P) منسوب لمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$، ولتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

نسمي **التمثيل المبياني** للدالة f (أو **منحنى** الدالة f) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث: $x\in D_f$ و $y=f(x)$ ، ونرمز له غالبا بالرمز (C_f) والمعادلة $y=f(x)$ تسمى معادلة (C_f).

تطبيق①:

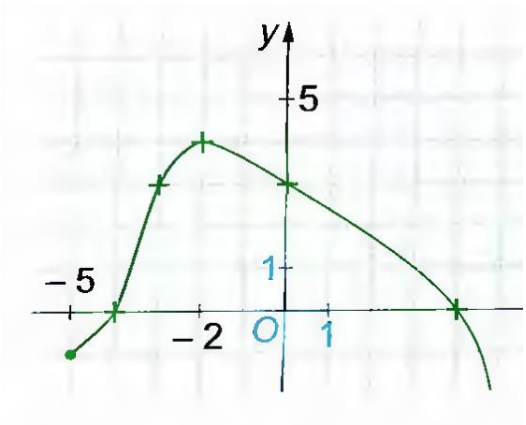
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

من بين النقط التالية، حدد تلك التي تنتمي إلى (C_f)، معللا اجابتك؟ (بدون انشاء المنحنى)

$A(0;0)$ ، $B(-1;1)$ ، $C(3;\frac{9}{4})$ ، $D(2;4)$

تطبيق②:

نعتبر f الدالة العددية الممثلة بمنحناها التالي:



1) حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2) حدد صور الاعداد التالية:

-5 ، -4 ، -3 ، -2 ، 0 ، 4 ،

3) كم عدد سوابق العدد 1.

4) حدد سوابق العدد 3

5) حدد سوابق العدد 5.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم.

ملاحظات:

- لتحديد نقط تقاطع منحنى دالة عددية f مع **محور الأفاصيل** نحل المعادلة $f(x)=0$ حيث $x\in D_f$.
- إذا كان $0\in D_f$ فإن نقطة تقاطع منحنى الدالة f مع **محور الأراتيب** هي النقطة $A(0,f(0))$.

تطبيق:

حدد تقاطع منحنى الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2+2x-8$ مع محوري المعلم.

5) زوجية دالة عددية: PARITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

أ- الدالة الزوجية: FONCTION PAIRE

نشاط:

ذ: لطرش عبد الكبير

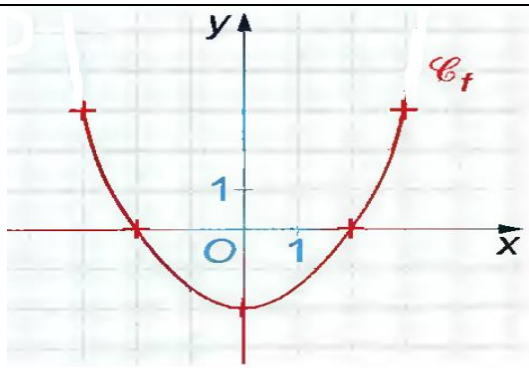
الشكل الآتي يبيّن التمثيل المبياني لدالة عددية f معرفة على $[-3\,;3]$ في معلم متعامد ممنظم.

1) قارن مبيانيا $f(2)$ و $f(-2)$ ثم $f(3)$ و $f(-3)$.

2) أ- من أجل $x\in[-3\,;3]$، بين أن: $-x\in[-3;3]$

ب- قارن $f(x)$ و $f(-x)$.

3) ما هي الخاصية الهندسية التي يحققها (C_f) ؟



تعريف وخاصية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f مجموعة تعريفها.

- نقول إن f دالة **زوجية** إذا تحقق الشرطان التاليان:
  - لكل x من D_f، لدينا: $-x\in D_f$ ("0 مركز D_f")
  - $f(-x)=f(x)$ لكل x من D_f.
- تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى (C_f).

ب-الدالة الفردية: FONCTION IMPAIRE

نشاط:

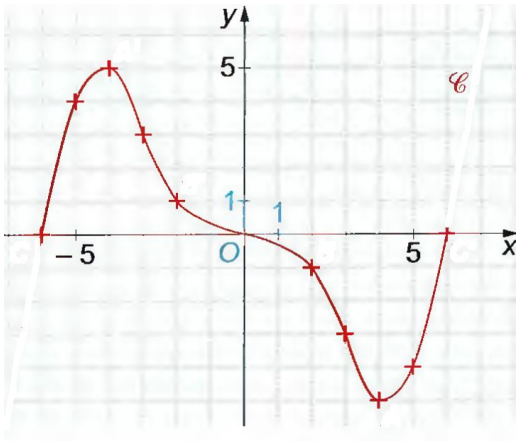
الشكل الآتي يبيّن التمثيل المبياني لدالة عددية f معرفة على $[-6\,;6]$ في معلم متعامد ممنظم.

1) قارن مبيانيا $f(5)$ و $f(-5)$ ثم $f(3)$ و $f(-3)$ ثم $f(2)$ و $f(-2)$

2) أ- من أجل $x\in[-6\,;6]$، بين أن: $-x\in[-6\,;6]$

ب- قارن $f(x)$ و $f(-x)$.

3) ما هي الخاصية الهندسية التي يحققها (C_f) ؟



تعريف وخاصية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f مجموعة تعريفها.

- نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:
  - لكل x من D_f، لدينا: $-x\in D_f$
  - $f(-x)=-f(x)$ لكل x من D_f
- تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

تطبيق①:

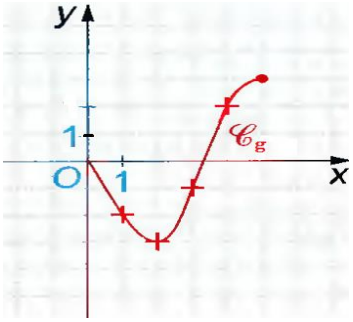
أدرس زوجية الدوال التالية:

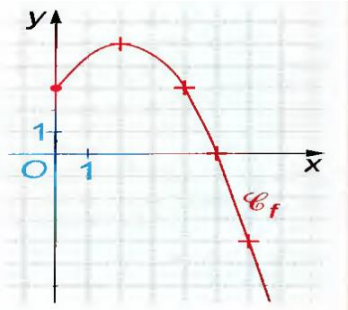
$f_1 : x \mapsto \lvert x\rvert - \dfrac{1}{x^2}$	$f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$	$f_3 : x \mapsto \lvert x-1\rvert - \lvert x+1\rvert$
$f_4 : x \mapsto \sqrt{x}+1$	$f_5 : x \mapsto x^2+x-3$	$f_6 : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$

تطبيق②:

ذ: لطرش عبد الكبير

اتمم منحنى الدالة f إذا علمت أنها زوجية على IR ثم اتمم منحنى الدالة g فردية على المجال $x \in [-5\,;5]$

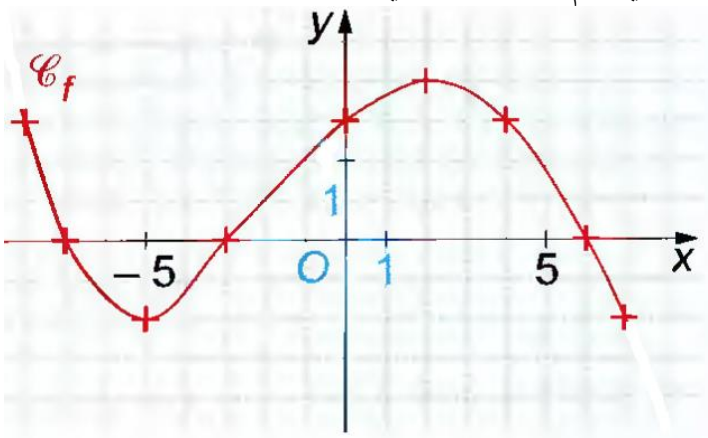




II. تغيرات دالة عددية: VARIATION D'UNE FONCTION NUMERIQUE

نشاط:

لتكن f دالة عددية ممثلة مبيانيا في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ كالتالي:



1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

املأ الجدول التالي:

x	−7	−6	−5	−3	0	2	4	6	7
$f(x)$									

2) كيف يبدو لك تغير الدالة f عندما يتغير x على المجال $[-7;-5]$.

" نلاحظ كلما كبرت قيمة x، نقصت قيمة $f(x)$ " ومنه نقول إن f دالة تناقصية قطعا على المجال $[-7;-5]$.

3) كيف يبدو لك تغير الدالة f عندما يتغير x على المجال $[-5;2]$.

" نلاحظ كلما كبرت قيمة x، كبرت قيمة $f(x)$ " ومنه نقول إن f دالة تزايدية قطعا على المجال $[-5;2]$.

4) أتمم ملء الجدول التالي:

x	-7		-5
$f(x)$	3	↘	-1

" هذا الجدول يسمى جدول تغيرات الدالة f .

5) ما هي أدنى قيمة و ماهي أعلى قيمة تصل إليها الدالة f وعند أي نقطة؟

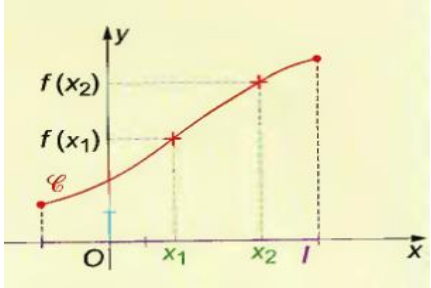
1) تغيرات دالة عددية: VARIATIONS D'UNE FONCTION NUMERIQUE

تعاريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

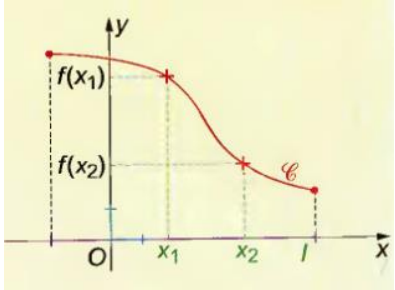
ذ: لطرش عبد الكبير

- نقول إن الدالة f **تزايدية قطعا** على المجال I إذا كان لكل عنصرين a و b من I بحيث $a \prec b$ ، لدينا $f(a) \prec f(b)$.
- نقول إن الدالة f **تناقصية قطعا** على المجال I إذا كان لكل عنصرين a و b من I بحيث $a \prec b$ ، لدينا $f(a) \succ f(b)$.
- نقول إن الدالة f **ثابتة** على المجال I إذا كان لكل عنصرين a و b من I بحيث $a \prec b$ ، لدينا $f(a) = f(b)$
- .نقول إن الدالة f **رتيبة** قطعا على المجال I إذا كانت تناقصية قطعا أو تزايدية قطعا على المجا



دالة تزايدية قطعا

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 و x_2 .
الدالة f تحافظ على نفس الترتيب.



دالة تناقصية قطعا

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ ليسا في نفس ترتيب x_1 و x_2 .
الدالة f لا تحافظ على نفس الترتيب.

تطبيق ①:

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^2 + 1$.

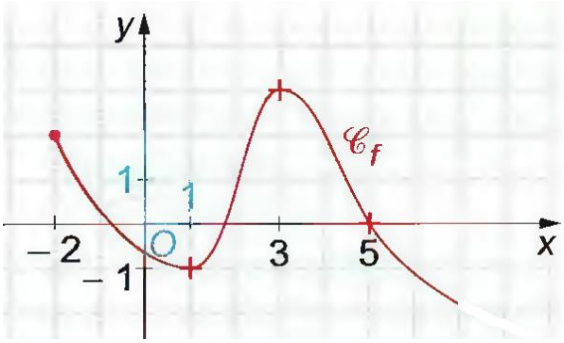
1) ليكن a و b عنصرين من المجال $[0;+\infty[$ حيث $a \succ b$.
بين أن $f(a) \succ f(b)$ ثم استنتج رتابة f على $[0;+\infty[$.

2) ادرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

3) اعط جدول تغيرات الدالة f .

تطبيق ②:

ضع جدول تغيرات الدالة الممثلة في الشكل اسفله:



2) معدل تغير دالة: TAUX DE VARIATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

تعريف :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها، وليكن a و b عنصرين مختلفين من D_f

العدد الحقيقي $T = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين العددين a و b.

خاصية :

ذ: لطرش عبد الكبير

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها، و a و b عنصرين مختلفين من I .

وليكن $T=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ معدل تغير الدالة f بين العددين a و b.

♣ f دالة تزايدية (تزايدية قطعا) على I إذا وفقط إذا كان $T\geq 0$ $(T\succ 0)$ لكل عنصرين مختلفين a و b من I .

♣ f دالة تناقصية على (تناقصية قطعا) I إذا وفقط إذا كان $T\leq 0$ $(T\prec 0)$ لكل عنصرين مختلفين a و b من I .

تطبيق:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=4x+5$.

أ- أحسب معدل تغير الدالة f بين عددين a و b مختلفين من IR.

ب- أستنتج رتابة الدالة f على IR.

2) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=x^2-4x+3$

أ- بين أن معدل تغير الدالة بين عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}$ هو $T=(a-2)+(b-2)$

ب- ادرس رتابة الدالة g على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;2]$.

ج- اعط جدول تغيرات الدالة g .

3) الرتابة وزوجية دالة عددية: MONOTONNIE ET PARITE D'UNE FONCTION

خاصية:

لتكن f دالة مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر و ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و J مماثله بالنسبة للصفر.

⊗ في حالة f دالة زوجية، لدينا:

- إذا كانت f تزايدية على I فإنها تناقصية على J .
- إذا كانت f تناقصية على I فإنها تزايدية على J .

⊗ في حالة f دالة فردية، لدينا:

- f لها نفس منحى التغيرات على كل من المجالين I و J .

تطبيق:

نعتبر الجدول التالي الذي يمثل تغيرات دالة عددية f :

x	-7		-5		0		5		7
$f(x)$	6	↘	4	↗	‖				

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2) أتمم الجدول إذا علمت أن الدالة f زوجية.

3) أتمم الجدول إذا علمت أن الدالة f فردية.

تمرين:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1) أدرس زوجية الدالة f.

ذ: لطرش عبد الكبير

2) بين أن معدل تغير الدالة بين عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}$ هو $T=\frac{1-ab}{(1+a^2)(1+b^2)}$

3) ادرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[1;+\infty[$ و $[0,1]$.

4) استنتج رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[-1,0]$.

5) اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

III. القيم القصوى والقيم الدنيا لدالة: MAXIMUMS ET MINIMUMS

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I .

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا وفقط إذا كان: $f(x)\le f(a)$ لكل x من I .
- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا وفقط إذا كان: $f(x)\ge f(a)$ لكل x من I .
- إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$ مطرافا للدالة f .

تطبيق:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

1) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ أن: $f(x)\ge 4$. ماذا تستنتج؟

2) بين أن: -4 قيمة قصوى للدالة f على المجال $]-\infty,0[$.

IV. الحل المبياني للمعادلات و المتراجحات: RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

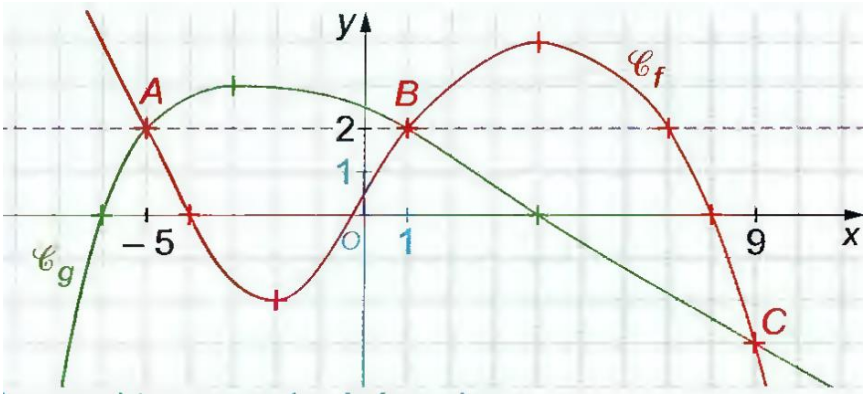
خاصية:

f دالة عددية و (C_f) منحناها و a عددا حقيقيا.

- ⊗ حلول المعادلة $f(x)=a$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y=a$
- ⊗ حلول المتراجحة $f(x)\le a$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) تحت المستقيم $y=a$
- ⊗ حلول المتراجحة $f(x)\ge a$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) فوق المستقيم $y=a$

تطبيق:

الشكل التالي يوضح منحنى دالتين f و g معرفتين على IR.



حل مبيانيا ما يلي:

$f(x)=2$	$f(x)=7$	$g(x)=2$	$g(x)=f(x)$
$f(x)\ge 2$	$g(x)\prec 2$	$g(x)\ge 0$	$g(x)\ge f(x)$
	$g(x)\prec f(x)$	$g(x)\times f(x)\le 0$	

V. الدالة الدورية- الدالة $x\mapsto\cos(x)$ – الدالة $x\mapsto\sin(x)$:

ذ: لطرش عبد الكبير

ذ. لطرش عبد الكبير

تعريف:

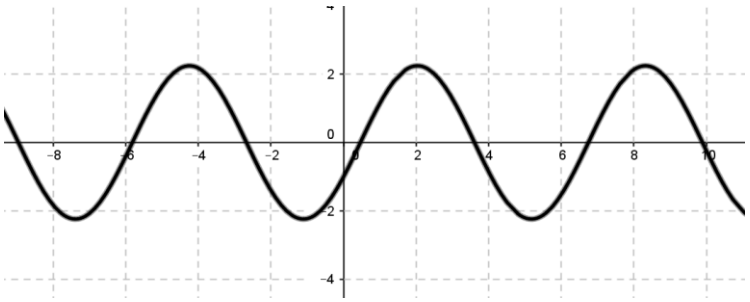
لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f.

نقول إن f دالة دورية. إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث:

⊗ لكل x من D_f لدينا $(x+T)\in D_f$

⊗ لكل x من D_f لدينا $f(x+T)=f(x)$.

العدد T يسمى دور للدالة f .



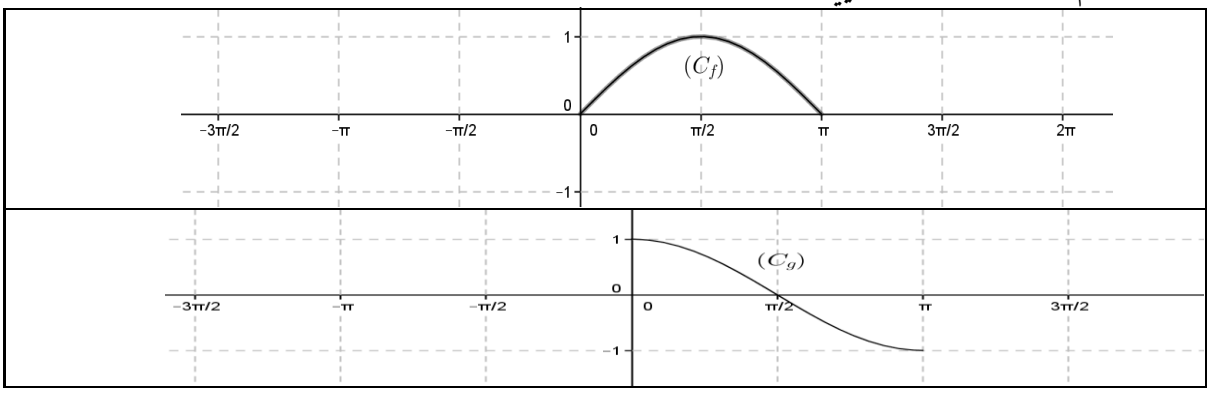
تطبيق:

نعتبر الدالتين المعرفتين على IR ب $f(x)=\sin(x)$ و $g(x)=\cos(x)$.

1) ادرس زوجية الدالتين f و g

2) احسب $f(x+2\pi)$ بدلالة $f(x)$ و $g(x+2\pi)$ بدلالة $g(x)$. ماذا تستنتج؟

3) اتمم الشكلين الممثلين لمنحنيي الدالتين f و g.



VI. الشلجم والمذلول: PARABOLE – HYPERBOLE

1) الدالة $x \mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$:

نشاط:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=2x^2$ و (C_f) منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس زوجية f ثم أول النتيجة هندسيا.

2) أحسب معدل تغير الدالة f.

3) استنتج تغيرات الدالة f على المجالين $[0,+\infty[$ و $]-\infty,0]$.

4) ضع جدول تغيرات الدالة f.

5) املأ الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$				

6) ثم أنشئ (C_f).

7) أعد نفس الاسئلة بالنسبة للدالة g المعرفة ب $g(x)=-2x^2$.

ذ: لطرش عبد الكبير

تعريف و خاصية:

منحنى الدالة $f : x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ يسمى **شلجما رأسه** $O(0,0)$ و **محور تماثله** هو محور الأراتيب.

جدول تغيرات الدالة f:

• إذا كان $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

• إذا كان $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

تطبيق:

حدد طبيعة منحنى الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ وأنشأه في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) الدالة $x \mapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$:

خاصية:

منحنى الدالة $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ عبارة عن **شلجم رأسه** $O(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ و **محور تماثله** هو المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$.

تطبيق:

املأ الجدول التالي:

الدالة f	a	b	c	$-\frac{b}{2a}$	$f(-\frac{b}{2a})$	رأس الشلجم	محور التماثل
x^2+2x+1							
$-2x^2+4x+1$							
x^2+1							

خاصية:

جدول تغيرات الدالة $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$:

• إذا كان $a \succ 0$

x	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$
$f(x)$	↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗

• إذا كان $a \prec 0$

x	$+\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$-\infty$
$f(x)$	↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘

تطبيق:

أعط جدول تغيرات الدالة f في الحالات التالية:

- **الحالة الأولى:** $f(x) = -x^2+x+2$؛
- **الحالة الثانية:** $f(x) = 3x^2+2x$.

تطبيق:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=2x^2-4x+3$ و (C_f) منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد طبيعة (C_f) مبرزا عناصره المميزة.

2) ضع جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج أن $f(x)\geq 1$ لكل x من IR.

3) أنشئ (C_f) ثم (C_g) بحيث $g(x)=2x^2$.

ملاحظة:

يمكن رسم منحنى الدالة العددية $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ انطلاقا من الشلجم ذي المعادلة $y=ax^2$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-\frac{b}{2a},f(-\frac{b}{2a}))$.

تطبيق:

أنشئ منحنى الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=-x^2+2x+1$ انطلاقا من منحنى الدالة g المعرفة ب $g(x)=-x^2$ في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ محددا متجهة الإزاحة التي مكنتك من ذلك.

3) الدالة $x\mapsto \frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم. نعتبر f الدالة المعرفة على IR^* ب: $f(x)=\frac{a}{x}$.

زوجية الدالة f:

لكل $x\neq 0$ لدينا $-x\neq 0$ وبالتالي: $-x\in IR^*$.

لدينا: $f(-x)=\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}=-f(x)$.

نستنتج ان الدالة f دالة فردية وبالتالي فمنحناها متماثل بالنسبة لأصل المعلم.

تغيرات الدالة f:

- إذا كان $a\succ 0$

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

- إذا كان $a\prec 0$

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

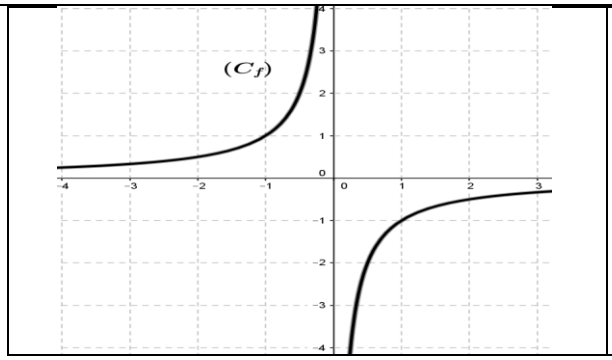
التمثيل المبياني f:

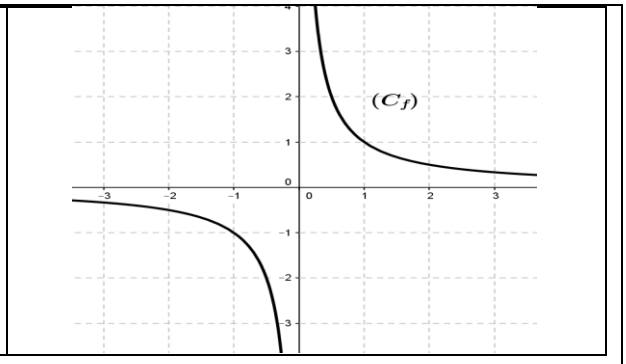
تعريف:

منحنى الدالة f يسمى **هذلولا مركزه** $O(0,0)$ و**مستقيماه المقاربان** هما: $x=0$ و $y=0$

- إذا كان $a\succ 0$
- إذا كان $a\prec 0$

ذ. لطرش عبد الكبير





تطبيق:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي: $f(x)=\frac{3}{x}$ و $g(x)=\frac{-2}{x}$.

1) حدد طبيعة (C_f) و (C_g) مبرزا العناصر المميزة لكل منحنى.

2) املأ الجدول التالي:

x	1	2	3	4
$f(x)$				
$g(x)$				

3) أنشئ (C_f) و (C_g).

4) الدالة المتخاطة: $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0 \, et \, ad-cb \neq 0)$

تعريف :

كل دالة عددية f يمكن كتابتها تعبيرها على الشكل $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-ab \neq 0$ و $c \neq 0$

تسمى **دالة متخاطة.**

مثال:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

لدينا: $a=2$، $b=1$، $c=1$ و $d=-3$ و $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$، إذن: الدالة f متخاطة.

تعريف :

لتكن f دالة متخاطة. توجد ثلاثة أعداد حقيقية α و β و λ بحيث : $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x+\alpha}$ لكل x يخالف $-\alpha$.

هذه الكتابة تسمى **الشكل المختصر** للدالة f.

مثال:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

لدينا: $f(x)=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$ لكل x يخالف 3.

تطبيق:

أعط الشكل المختصر للدوال المتخاطة التالية:

- $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

ذ: لطرش عبد الكبير

- $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

خاصية:

جدول تغيرات الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ هو:

• إذا كان $\lambda \succ 0$	• إذا كان $\lambda \prec 0$
x: $+\infty$ ، $-\alpha$ ، $-\infty$ $f(x)$: ↗ ‖ ↗	x: $+\infty$ ، $-\alpha$ ، $-\infty$ $f(x)$: ↘ ‖ ↘

تطبيق:

أعط جدول تغيرات الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$.

خاصية:

منحنى الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ عبارة عن هذلول مركزه $\Omega(-\alpha,\beta)$ و مقارباه $x=-\alpha$ و $y=\beta$.

تطبيق:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ و (C_f) منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2) حدد طبيعة (C_f) مبرزا عناصره المميزة.
3) ضع جدول تغيرات الدالة f.
4) أنشئ (C_f) ثم (C_g) بحيث $g(x)=\dfrac{3}{x}$.

ملاحظة:

يمكن رسم منحنى الدالة العددية $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ انطلاقا من الهذلول ذي المعادلة $y=\dfrac{\lambda}{x}$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-\alpha,\beta)$.

تمرين توليفي:

نعتبر f و g دالتين عدديتين معرفتين بما يلي: $f(x)=-2x^2+4x$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

1) حدد طبيعة (C_f) مبرزا عناصره المميزة.
2) ضع جدول تغيرات الدالة f.
3) أنشئ (C_f) ثم حل مبيانيا ما يلي: $f(x)=3$ ، $f(x)\geq 3$ و $f(x)\prec 3$.
4) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة f.
5) حدد طبيعة (C_g) مبرزا عناصره المميزة.
6) ضع جدول تغيرات الدالة g.
7) أنشئ (C_g) بلون مختلف في نفس المعلم الذي أنشأت فيه (C_f).

ذ: لطرش عبد الكبير

	❸) حل مبيانيا ما يلي: $\frac{x}{x-1}=-2x^2+4x$ و $\frac{x}{x-1}\leq -2x^2+4x$.

ذ: لطرش عبد الكبير

ملاحظات	الجداء السلمي : LE PRODUIT SCALAIRE

ذ: لطرش عبد الكبير

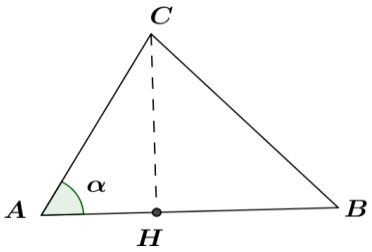
I. الجداء السلمي لمتجهتين: PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

نشاط:

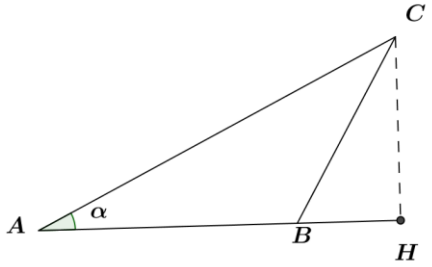
ليكن ABC مثلثا في المستوى و α قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ نضع $d=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.

1) حدد قيمة d إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في A.

2) نفترض أن: $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ ولتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). (أنظر الحالتين)



الحالة 1



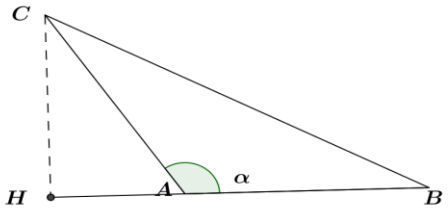
الحالة 2

أ) - تحقق أن $AC^2=CH^2+AH^2$ و $BC^2=CH^2+BH^2$.

ب) - استنتج أن $d=AB\times AH$.

ج) - بين أن $d=AB\times AC\times\cos\alpha$.

3) نفترض أن: $\frac{\pi}{2}<\alpha\le\pi$



أ) بين أن $d=-AH\times AB$.

ب) بين أن $d=AB\times AC\times\cos\alpha$

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى و A و B و C ثلاث نقط بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ولتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

لجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له ب: $\vec{u}.\vec{v}$ والمعرف كما يلي:

- إذا كان للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ نفس المنحى فإن: $\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$.
- إذا كان للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ نفس المنحى فإن: $\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH$.

العدد $\vec{u}.\vec{v}$ يقرأ $\vec{u}$ سلمي $\vec{v}$

خاصية:(الصيغة المثلثية للجداء السلمي)

- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى. لدينا $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى. لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$

تطبيق:

1) ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A بحيث $BC=5$. أحسب $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

2) ليكن AOB مثلثا بحيث $\widehat{\ }$ زاوية منفرجة وليكن H المسقط العمودي ل B على (OA). أحسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ علما أن: $OA=3$ و $OH=2$.

3) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث : $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\|=\frac{1}{3}$ و $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. أحسب $\vec{u}.\vec{v}$.

4) حدد قياس الزاوية الهندسية $\widehat{\ }$ إذا علمت أن: $AB=\sqrt{2}$ و $AC=2$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\sqrt{6}$.

5) حدد القياسات الممكنة للزاوية $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ إذا علمت أن: $\vec{u} = \frac{4}{3}$ و $\vec{v} = \sqrt{3}$ و $\vec{u}.\vec{v} = -2$.

II. خاصيات الجداء السلمي:

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى و $k \in \mathbb{R}$. لدينا:

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (العدد الموجب $\vec{u}^2$ يسمى المربع السلمي ل $\vec{u}$)

تطبيق:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ و $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

أحسب $\vec{u}.\vec{v}$، $\vec{u}^2$، $\vec{v}^2$ ثم $(-2\vec{u} + 3\vec{v}).\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$.

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى. لدينا:

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

تطبيق:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث : $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 7$ و $\vec{u}.\vec{v} = -2$.

أحسب $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ و $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ و $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ و $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى. لدينا:

نقول إن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ونكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$.

تطبيق:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين متعامدتين بحيث: $\|\vec{u}\| = 4$ و $\|\vec{v}\| = 5$.

حدد العدد الحقيقي x الذي يحقق: $(x\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 13$.

تمرين:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $\cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1) أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) لتكن D النقطة المعرفة بما يلي: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$. بين ان المثلث ABD قائم الزاوية في A.

III. مبرهنة الكاشي:

تمهيد:

ليكن ABC مثلث ، لنحسب BC^2 بدلالة و AB و AC و $\cos\hat{A}M$

$$BC^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\hat{A}$$

ذ: لطرش عبد الكبير

ذ: لطرش عبد الكبير

خاصية: (مبرهنة الكاشي)

لكل مثلث في المستوى، لدينا:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\hat{A})$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos(\hat{C})$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos(\hat{B})$

تطبيق:

ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ و $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 2$. أحسب المسافة BC .

أحسب ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $BC = 2$. أحسب المسافة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

IV. مبرهنة المتوسط:

تمهيد ليكن ABM مثلثا، و I منتصف $[AB]$. لنحسب $MA^2 + MB^2$ بدلالة MI و AB .

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\,\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

خاصية: (مبرهنة المتوسط)

ليكن ABM مثلثا، إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن: $MA^2 + MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI^2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB^2}$

تطبيق:

ليكن ABM مثلثا و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$ بحيث:

$MA = 3$ و $AB = 4$ و $MB = 4$ أحسب المسافات MI و AK و BJ .

تمرين:

ليكن $ABCD$ متوازي الاضلاع بحيث $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ و $AD = 4$ و $CD = 6$. و لتكن O منتصف القطعة $[AB]$.

1) أحسب المسافتين BD و AC

2) بين أنه لكل نقطة M من المستوى لدينا: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$

3) استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث $MA^2 + MB^2 = 24$

V. العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية:

خاصية: (مبرهنة الكاشي)

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) فإن:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = BH \times BC$
- $CA^2 = CH \times CB$
- $AH^2 = HB \times HC$

هذه المتساويات تسمى العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية.

تطبيق:

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

املأ معلل جوابك الجدول التالي:

AB	AC	BC	HC	HB	AH

				4	3
2	5				

تمرين توليفي:

ليكن ABC مثلثا بحيث : $AB = 3$ و $AC = 1$ و $\cos\left(BAC\right) = \frac{-1}{3}$

1) تحقق من أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

2) احسب المسافة BC .

3) - لتكن I و J منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[AC]$ على التوالي.

أ/- احسب AI و BJ .

ب/- احسب قيمة $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

4) لتكن E النقطة من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

أ/- عبر عن المتجهة $\overrightarrow{IE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب/- بين أن المستقيمين (AB) و (IE) متعامدان.

ذ: لطرش عبد الكبير

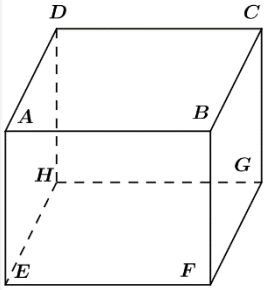
الهندسة الفضائية:

ذ. لطرش عبد الكبير

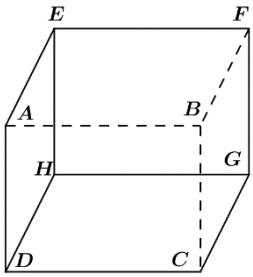
I. تحديد مستوى في الفضاء:

1. تقنيات رسم الاشكال الفضائية على المستوى:

نشاط ①:



1) الوجه الأمامي للمكعب ABCDEFGH هو:



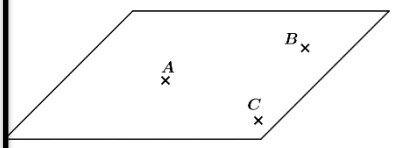
2) الوجه الأمامي للمكعب ABCDEFGH هو:

➢ التمثيل المستوي للمجسمات، يعتمد على القواعد التالية:

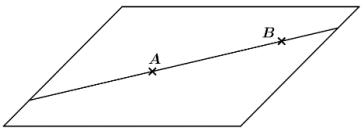
2. موضوعات الهندسة الفضائية:

الموضوعة ①:

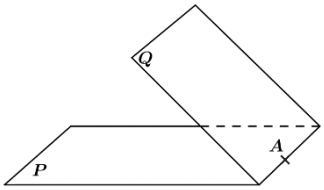
الموضوعة ②:



الموضوعة ③:



الموضوعة ④:



➢ نتائج:

يتحدد مستوى في الفضاء ب:

-
-
-
-

➢ ملحوظة: (الاستوائية)

-
-
-

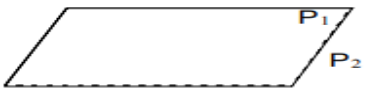
II. الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء:

1. الأوضاع النسبية لمستوين في الفضاء:

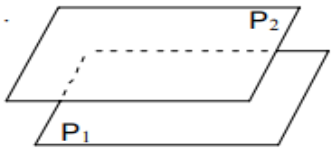
ليكن (P_1) و(P_2) مستويين من الفضاء:

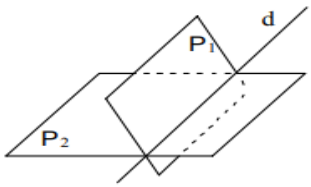
المستويان (P_1) و(P_2) إما أن يكونا:

-



-



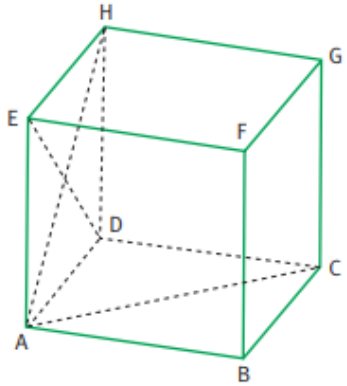


- .....
.....
.....

2. الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء:

نشاط ②:

في الشكل أسفله $ABCDEF$ متوازي مستطيلات قائم.



ضع علامة (×) في المكان المناسب:

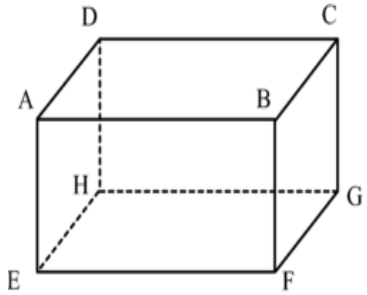
المستقيمات	مستوائيان			غير مستوائيان
	متقاطعان	منطبقان	متوازيان قطعا	
(BC) و (AB)				
(AB) و (GH)				
(AC) و (DC)				
(AC) و (BF)				
(EG) و (EA)				
(AC) و (ED)				

➢ خطاطة:

ليكن (D_1) و(D_2) مستقيمين من الفضاء:

نشاط ③:

في الشكل أسفله $ABCDEF$ متوازي مستطيلات قائم.



ضع علامة (×) في المكان المناسب وأتمم الفراغ:

المستقيم	المستوى	يتقاطعان في نقطة وحيدة	المستقيم ضمن المستوى	متوازيان قطعا
(AB)	(ABC)			
(AB)	.....	×	–	–
(EF)	(CDF)			
.....	(BCF)	–	–	×
(DF)	(BCE)			

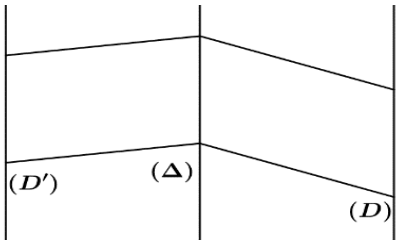
➢ خطاطة:

ليكن (D) مستقيما و(P) مستوى من الفضاء:

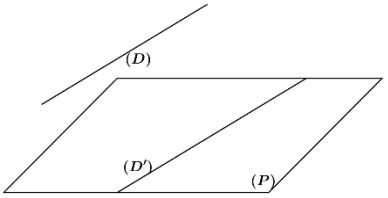
III. التوازي والتعامد في الفضاء:

1. خاصيات التوازي والتقاطع:

خاصية ①:



خاصية ②:



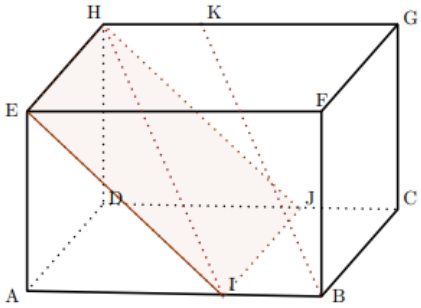
تطبيق ①

$ABCDEF$ متوازي مستطيلات قائم و I، J و K ثلاثة نقط من القطع $[AB]$، $[DC]$ و $[HG]$ على التوالي بحيث: $BI = CJ = HK$. أنظر الشكل أسفله.

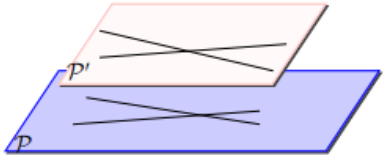
1) حدد معللا أجابتك طبيعة الرباعي $IBKH$.

2) حدد الوضع النسبي للمستقيمين (BK) و(IH).

3) استنتج ان المستقيم (BK) يوازي (HIJ).



خاصية ③:



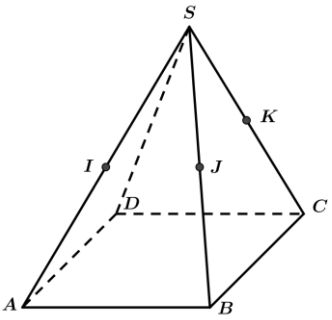
تطبيق ②

$SABCD$ هرم في الفضاء و I، J و K على التوالي منتصفات القطع $[SA]$، $[SB]$ و $[SC]$.

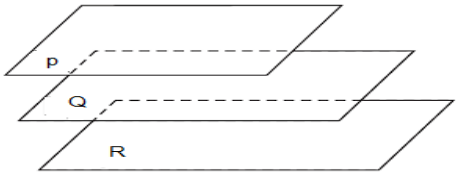
1) بين ان $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج ان الوضع النسبي للمستقيمين (IJ) و (AB).

2) إستنتج ان المستقيم (IJ) يوازي قطعا المستوى (ABC).

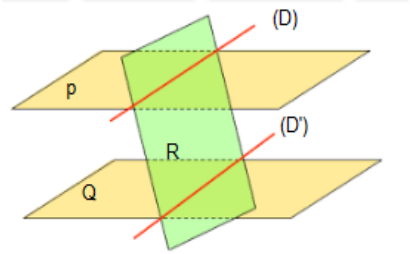
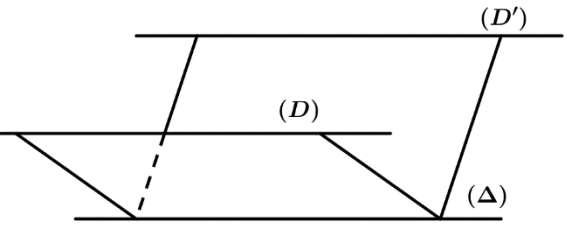
3) بين أن $(IJK) \parallel (ABC)$.



خاصية ④:



خاصية ⑤:



خاصية ⑥: